Kapitel 11

Prädikatenlogik

Im Kapitel über Aussagenlogik haben wir die Eigenschaften der Booleschen Operationen untersucht. Jetzt wollen wir das als *Prädikatenlogik* bezeichnete System betrachten, das sich durch Hinzufügen der Quantoren ergibt. Wie zuvor ist der Rahmen für Prädikatenlogik durch ETT gegeben. Da es sich bei den Quantoren um höherstufige Operationen handelt, spielen Lambda-Abstraktionen jetzt eine wichtige Rolle. Analog zu den Booleschen Operationen werden wir die Quantoren durch Gleichungen axiomatisieren, sodass wir prädikatenlogische Gleichungen mithilfe der Gleichheitsregeln von ETT beweisen können. Zusätzlich geben wir ein als *System des natürlichen Schließens* bezeichnetes Ableitungssystem an, mit dem die Gültigkeit prädikatenlogischer Formeln besonders einfach bewiesen werden kann.

11.1 Quantoren und logische Axiome

Wir beginnen mit dem Standardmodell für Quantoren [Church 1940]. Sei X eine Menge. Dann sind die **Quantoren für** X die wie folgt definierten Funktionen:

$$\begin{aligned}
&\forall, \exists \in (X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B} \\
&\forall f = (f = \lambda x \in X.\, 1) \\
&\exists f = (f \neq \lambda x \in X.\, 0)
\end{aligned}$$

Im Folgenden arbeiten wir mit einer Signatur, die neben den Typkonstanten $\mathbb{B}$ und X die Termkonstanten 0, 1, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ enthält. Diese Konstanten bezeichnen wir als **logische Konstanten**. Darüber hinaus dürfen noch weitere Konstanten vorkommen, die im Folgenden aber ohne Belang sind. Die Typen der Booleschen Konstanten kennen wir bereits. Die Konstanten $\forall$, $\exists$ für die Quantoren haben beide den Typ $(X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$.

Unter einer **Standardinterpretation** verstehen wir eine Interpretation, die $\mathbb{B}$ als $\{0, 1\}$ interpretiert, die Konstanten für die Boolesschen Operationen durch die Boolschen Operationen (zweiwertige Boolsche Algebra), und die Konstanten für die Quantoren durch die oben definierten Quantoren.

Unter einer **Formel** verstehen wir einen Term des Typs $\mathbb{B}$. Die Menge aller Formeln bezeichnen wir mit *For*. Mit den Buchstaben A, B, C werden wir immer Formeln bezeichnen. Wir verwenden die Notation

$$\forall x.A \stackrel{\text{def}}{=} \forall(\lambda x.A)$$

Analog zur Notation für Lambda-Abstraktionen legen wir fest, dass der auf den Punkt folgende Rumpf einer Quantifizierung $\forall x.A$ so weit wie möglich nach rechts ausgedehnt wird:

$$\forall x.fx \vee u \quad \rightsquigarrow \quad \forall x.(fx \vee u)$$

Damit wir noch weniger Klammern schreiben müssen, lassen wir sie bei Anwendungen der Negationskonstante weg, wenn sie mithilfe der Typinformation ergänzt werden können:

$$\neg\forall x.\neg fx \vee u \quad \rightsquigarrow \quad \neg(\forall x.(\neg(fx) \vee u))$$

Implikationen schreiben wir mit der Notation

$$A \to B \stackrel{\text{def}}{=} \neg A \vee B$$

Wir vereinbaren, dass die Infixoperatoren $\wedge$, $\vee$, $\to$ in dieser Ordnung binden. Damit gilt:

$$A \wedge B \vee C \to A \vee C \quad \rightsquigarrow \quad ((A \wedge B) \vee C) \to (A \vee C)$$

Sei *BAx* die Menge der Booleschen Axiome. Unser erstes Ziel ist die Angabe einer Menge *QAx* so genannter Quantoraxiome, so dass für die Menge der **logischen Axiome**

$$Lax \stackrel{\text{def}}{=} BAx \cup QAx$$

das Folgende gilt:

- Jede Standardinterpretation erfüllt *LAx*.
- Aus *LAx* können mithilfe der Gleichheitsregeln viele der in allen Standardinterpretationen gültigen Gleichungen abgeleitet werden.[1]

Wir definieren die Menge der **Quantoraxiome** wie folgt:

$$\begin{aligned} QAx \stackrel{\text{def}}{=} \{ \quad & \forall f = \forall f \wedge fx, \\ & \forall x.u = u, \\ & \forall x.fx \vee u = \forall f \vee u, \\ & \neg\forall f = \exists x.\neg fx \quad \} \end{aligned}$$

Bei f, x und u handelt es sich um Variablen.

[1] Für Experten: *LAx* soll für prädikatenlogische Gleichungen erster Stufe vollständig sein.

Instanziierung

$(\forall\mathrm{I})\quad \forall f = \forall f \wedge fx$	$(\exists\mathrm{I})\quad \exists f = \exists f \vee fx$

Elimination

$(\forall\mathrm{E})\quad \forall x.\, u = u$	$(\exists\mathrm{E})\quad \exists x.\, u = u$

De Morgan

$(\forall\neg)\quad \neg\forall f = \exists x.\, \neg fx$	$(\exists\neg)\quad \neg\exists f = \forall x.\, \neg fx$

Distribution

$(\forall\vee)\quad \forall x.\, fx \vee u = \forall f \vee u$	$(\exists\wedge)\quad \exists x.\, fx \wedge u = \exists f \wedge u$
$(\forall\wedge)\quad \forall x.\, fx \wedge u = \forall f \wedge u$	$(\exists\vee)\quad \exists x.\, fx \vee u = \exists f \vee u$
$(\forall\wedge')\quad \forall x.\, fx \wedge gx = \forall f \wedge \forall g$	$(\exists\vee')\quad \exists x.\, fx \vee gx = \exists f \vee \exists g$

Vertauschung

$(\forall\forall)\quad \forall x \forall y.\, hxy = \forall y \forall x.\, hxy$	$(\exists\exists)\quad \exists x \exists y.\, hxy = \exists y \exists x.\, hxy$

Abbildung 11.1: Quantorgesetze (f, g, h, x, u sind Variablen)

Aufgabe 11.1 Geben Sie die Typen der in den Quantoraxiomen vorkommenden Variablen an. ■

Abbildung 11.1 zeigt eine Reihe von prädikatenlogische Gleichungen, die wir als **Quantorgesetze** bezeichnen. Jedes der Quantorgesetze lässt sich mit den Gleichheitsregeln aus *LAx* ableiten. Zunächst überzeugt man sich relativ leicht davon, dass alle rechtsstehenden Gesetze aus BAx und den links stehenden Gesetzen abgeleitet werden können.

Beispiel 11.1.1 Die Gleichung $\exists f = \exists f \vee fx$ lässt sich wie folgt aus *LAx* ableiten:

$$\begin{aligned}
\exists f &= \exists x.fx && \eta\\
&= \exists x.\neg\neg fx && \mathit{BAx}\\
&= \exists x.\neg(\lambda x.\neg fx)x && \beta\\
&= \neg\forall x.\neg fx && \forall\neg\\
&= \neg((\forall x.\neg fx) \wedge \neg fx) && \forall\mathrm{I}\\
&= \neg(\forall x.\neg fx) \vee fx && \mathit{BAx}\\
&= \exists f \vee fx && \text{wie oben}
\end{aligned}$$

■

Der Beweis der noch fehlenden Gesetze auf der linken Seite (die erste 4 Gesetze sind gerade die Quantoraxiome) erfordert mehr Aufwand. Wir werden später zeigen, wie man diese Beweise systematisch konstruieren kann.

Proposition 11.1.1 Die Quantorgesetze sind aus LAx ableitbar.

Zu einem Term M bestimmen wir den **dualen Term** $\hat{M}$, indem wir die logischen Konstanten 0, 1, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ wie folgt miteinander vertauschen:

$$0 \leftrightsquigarrow 1 \qquad\qquad \wedge \leftrightsquigarrow \vee \qquad\qquad \forall \leftrightsquigarrow \exists$$

Alle anderen Konstanten und alle Variablen bleiben so wie sie sind. Ein Blick auf die Quantorgesetze in Abbildung 11.1 zeigt, dass zu jedem Gesetz das duale Gesetz erscheint. Da die Quantorgesetze die Quantoraxiome mit einschließen und die Booleschen Axiome ebenfalls unter Dualisierung abgeschlossen sind, gilt der folgende Satz:

Satz 11.1.2 (Dualisierung) Für jede Gleichung $M = N$ gilt:

$$LAx \vdash M = N \iff LAx \vdash \hat{M} = \hat{N}$$

Unter einer **Pränex-Formel** verstehen wir eine Formel, bei der alle Quantoren außen stehen. Beispielsweise ist $\forall x \exists y.hxy$ eine Pränex-Formel. Dagegen sind $\neg\forall f$ und $\forall f \wedge \forall g$ keine Pränex-Formeln. Mit den Quantorgesetzen kann man zu einer Formel A recht einfach eine beweisbar-äquivalente Pränex-Formel B bestimmen (d.h. $LAx \vdash A = B$). Wir bezeichnen B als eine **Pränex-Normalfom** von A.

Beispiel 11.1.2 Wir bestimmen eine Pränex-Normalfom der Formel $(\forall x \exists y.gxy \wedge \forall z.gyz) \wedge \forall x.gxz$.

$$\begin{array}{ll}
(\forall x \exists y.gxy \wedge \forall z.gyz) \wedge \forall x.gxz & \\
= \forall x.\ (\exists y.gxy \wedge \forall z.gyz) \wedge gxz & \forall\wedge' \\
= \forall x \exists y.\ gxy \wedge (\forall z.gyz) \wedge gxz & \exists\wedge \\
= \forall x \exists y \forall z'.\ gxy \wedge gyz' \wedge gxz & \forall\wedge
\end{array}$$

■

11.2 Natürliches Schließen

Eine Formel A heißt **gültig für** LAx, wenn die Gleichung $A = 1$ semantisch aus LAx folgt. Eine Formel A heißt **ableitbar aus** LAx, wenn die Gleichung $A = 1$ aus LAx ableitbar ist. Aus der Korrektheit der Gleichheitsregeln folgt, dass jede aus LAx ableitbare Formel für LAx gültig ist.

$$(\forall R)\ \frac{A \to B}{A \to \forall x.B}\ x \notin FV(A) \qquad (\exists L)\ \frac{A \wedge B \to C}{A \wedge (\exists x.B) \to C}\ x \notin FV(A \wedge C)$$

$$(\forall L)\ \frac{A \wedge B[x{:=}\,M] \to C}{A \wedge (\forall x.B) \to C} \qquad (\exists R)\ \frac{A \to B[x{:=}\,M]}{A \to \exists x.B}$$

$$(\text{Lam})\ \frac{A}{B}\ \ \emptyset \vdash A = B \qquad (\text{Bool})\ \frac{A}{B}\ \ BAx \vdash A{\to}B = 1$$

$$(\text{Cut})\ \frac{A \to B \qquad A \wedge B \to C}{A \to C} \qquad (\text{Done})\ \frac{}{1}$$

$$(\wedge R)\ \frac{A \to C_1 \qquad A \to C_2}{A \to C_1 \wedge C_2} \qquad (\vee L)\ \frac{A \wedge B_1 \to C \qquad A \wedge B_2 \to C}{A \wedge (B_1 \vee B_2) \to C}$$

Abbildung 11.2: Natürliche Schlußregeln (A, B, C sind Formeln)

Wir führen jetzt ein Deduktionssystem ein, das wir **System des natürlichen Schließens** nennen. Dabei handelt es sich um eine liberalisierte Variante des so genannten *Sequentenkalkül*, der von Gerhard Gentzen im Rahmen seiner 1934 fertig gestellten Dissertation entwickelt wurde. Während die Gleichheitsregeln Gleichungen aus Gleichungen ableiten, leiten die natürlichen Schlußregeln Formeln aus Formeln ab. Dabei werden wir nur solche Regeln betrachten, die zu aus LAx ableitbaren Formeln aus LAx ableitbare Formeln ableiten.

Abbildung 11.2 zeigt die natürlichen Schlußregeln, die wir hier betrachten wollen. Im Folgenden wird Γ stets eine Menge von Formeln bezeichnen. Wir sagen, dass eine Formel A aus einer Menge Γ von Formeln **ableitbar** ist und schreiben $\Gamma \vdash A$, wenn A aus Γ durch endlich viele Anwendungen der natürlichen Schlußregeln in Abbildung 11.2 erhalten werden kann.

Beachten Sie, dass die Regel Lam ein Spezialfall der Regel Bool ist. Wir haben die Regel Lam aufgenommen, um in Beweisen die Regel Bool nur dann zu verwenden, wenn wirklich die Booleschen Axiome benötigt werden.

Satz 11.2.1 (Korrektheit) Sei $\Gamma \vdash A$ und sei jede Formel in Γ aus LAx ableitbar. Dann ist A aus LAx ableitbar.

Beweis Es genügt, für jede der Regeln zu zeigen, dass ihre Konklusion ableitbar ist, wenn ihre Prämissen ableitbar sind. Wir zeigen hier nur die Korrektheit der Regel $\forall$R.

Sei $Lax \vdash A \to B = 1$ und $x \neq FV(A)$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A \to \forall x.B &= \neg A \vee \forall x.B \\
&= \forall x.\neg A \vee B && \forall\vee,\ BAx \\
&= \forall x.A \to B \\
&= \forall x.1 && \text{da } A \to B = 1 \\
&= 1 && \forall\mathrm{E}
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 11.2 Zeigen Sie die Korrektheit der verbleibenden natürlichen Schlußregeln. ■

Beispiel 11.2.1 Wir beweisen mit den natürlichen Schlußregeln, dass die Formel $(\forall x.fx \wedge gx) \to \forall f$ ableitbar ist.

$$
\begin{aligned}
& (\forall x.fx \wedge gx) \to \forall f \\
\vdash\ & (\forall x.fx \wedge gx) \to \forall x.fx && \mathrm{Lam} \\
\vdash\ & (\forall x.fx \wedge gx) \to fx && \forall\mathrm{R} \\
\vdash\ & fx \wedge gx \to fx && \mathrm{Bool},\ \forall\mathrm{L} \\
\vdash\ & 1 && \mathrm{Bool}
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 11.2.2 Wir beweisen mit den natürlichen Schlußregeln, dass die Formel $\forall f \wedge \forall g \to \forall x.fx \wedge gx$ ableitbar ist.

$$
\begin{aligned}
& \forall f \wedge \forall g \to \forall x.fx \wedge gx \\
\vdash\ & \forall f \wedge \forall g \to fx \wedge gx && \forall\mathrm{R} \\
\vdash\ & (\forall x.fx) \wedge (\forall x.gx) \to fx \wedge gx && \mathrm{Lam} \\
\vdash\ & (\forall x.fx) \wedge gx \to fx \wedge gx && \forall\mathrm{L} \\
\vdash\ & fx \wedge gx \to fx \wedge gx && \mathrm{Bool},\ \forall\mathrm{L} \\
\vdash\ & 1 && \mathrm{Bool}
\end{aligned}
$$

■

11.3 Höherstufige Quantifizierung

Mit dem Axiom

$$(\forall\exists) \quad \forall x \exists y.hxy = \exists f' \forall x.hx(f'x)$$

kann man bei Pränex-Normalformen alle Existenzquantoren nach außen ziehen. Eine Pränex-Normalform, bei der alle existentiallen Quantoren außen stehen, bezeichnen wir als **Skolem-Normalform.**

Beachten Sie, dass die Konstante $\forall$ in dem gerade angegebenen Axiom $\forall\exists$ links mit einem anderen Typ benutzt wird als rechts. Links wird wie üblich über den X quantifiziert, rechts dagegen über den höherstufigen Typ $X \to X$. Das bedeutet, dass es sich um zwei verschiedene Konstanten handelt, die wir aber beide durch das überladene Symbol $\forall$ darstellen.

Beispiel 11.3.1 Wir bestimmen eine Skolem-Normalform der Formel $\forall x \forall y \exists z.\, gxy \wedge gyz$:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \exists z.\, gxy \wedge gyz &= \forall x \exists f' \forall y.\, gxy \wedge gy(f'y) && \forall\exists \\ &= \exists f'' \forall x \forall y.\, gxy \wedge gy(f''xy) && \forall\exists \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass die Variablen x, y, z jeweils den Typ X haben, dann ergeben sich für die neu eingeführten Variablen f' und f'' die Typen $X \to X$ und $X \to X \to X$. ■

Mit QAx_ω bezeichnen wir die unendliche Axiomenmenge, die sich ergibt, wenn man für jeden Typ eine Instanz von QAx hinzufügt (QAx erlaubt nur Quantifizierung über den Typ X) und zusätlich alle Instanzen des obigen Axioms $\forall\exists$.