Kapitel 6

Mengenlehre

Eine wichtige Aufgabe der Informatik besteht in der Konstruktion präziser gedanklicher Modelle. Dabei kommen mathematische Datenstrukturen zum Einsatz, wie wir sie in diesem Kapitel behandeln werden.

Die grundlegende mathematische Datenstruktur sind Mengen. Mengen dienen als universelle Datenstruktur, auf die alle anderen Datenstrukturen zurückgeführt werden.

Im Folgenden behandeln wir Mengen, Tupel, Graphen, Relationen, Funktionen und Ordnungen. Außerdem gehen wir auf Induktionsbeweise ein.

Da die hier betrachteten Datenstrukturen oft keine unmittelbare Entsprechung in Standard ML haben, bedienen wir uns der Sprache der Mathematik. Die mathematische Sprache gehört zum Kern der Informatik und bildet die Grundlage für eine effiziente fachliche Kommunikation.

6.1 Grundlegendes über Mengen

Mengen sind gedankliche Objekte, die wir durch die folgenden Axiome definieren:

1. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Mengen. Die von einer Menge x zusammengefassten Mengen bezeichnen wir als die **Elemente von** x. Wir schreiben $x \in y$, um zu sagen, dass die Menge x ein Element der Menge y ist.
2. Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente hat. Diese Menge heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
3. Jede endliche oder unendliche Sammlung von Mengen kann zu einer Menge zusammengefasst werden. Die Menge, die die Mengen $x_1, \dots, x_n$ zusammenfasst, bezeichnen wir mit $\{x_1, \dots, x_n\}$.
4. **Gleichheit:** Zwei Mengen x und y sind genau dann gleich ($x = y$), wenn jedes Element von x ein Element von y ist und jedes Element von y ein Element von x ist.

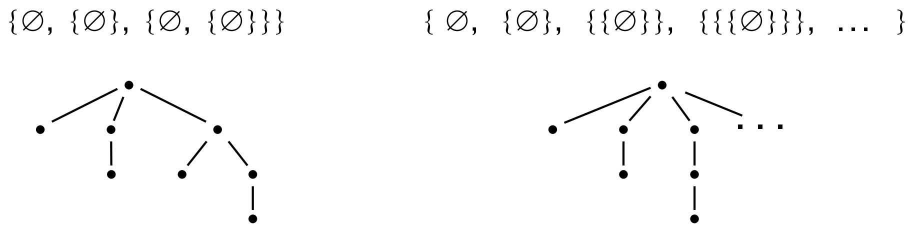


Abbildung 6.1: Baumdarstellung von Mengen

5. **Wohlfundiertheit:** Es gibt keine unendliche Folge $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots$ von Mengen, sodass für alle $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ die Menge x_{n+1} ein Element der Menge x_n ist.

Gemäß Axiom 1 betrachten wir nur **reine Mengen**: Die Elemente von Mengen müssen wieder Mengen sein. Hier sind Beispiele für Mengen, die wir ausgehend von der leeren Menge bilden können:

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\{\emptyset\}\}, \quad \{\{\{\emptyset\}\}\}, \quad \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$$

Die Menge $\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$ hat 3 Elemente: die leere Menge $\emptyset$, die einelementige Menge $\{\emptyset\}$, und die zweielementige Menge $\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$.

Die leere Menge ist ein atomares Objekt. Alle anderen Mengen sind zusammengesetzte Objekte. Der Aufbau einer zusammengesetzten Menge kann wie in Abildung 6.1 gezeigt durch einen Baum dargestellt werden. Dabei erscheinen die Elemente der Menge als die Unterbäume des Baums.

Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie nur endlich viele Elemente hat. Das einfachste Beispiel für eine **unendliche Menge** ist die in Abbildung 6.1 rechts angegebene Menge.

Zwei wichtige Eigenschaften von Mengen sind Ihnen vom Umgang mit Zahlen her vertraut. Zum einen sind Mengen *unveränderliche Objekte* (im Gegensatz zu physikalischen Objekten, deren Zustand sich mit der Zeit ändern kann). Zum anderen *bedeutet Gleichheit für Mengen Identität*. Es kann also keine zwei verschiedenen Mengen geben, die gleich sind. Zwei Mengen sind genau dann ungleich ($x \neq y$), wenn sie verschieden sind.

Das **Gleichheitsaxiom** (4) besagt, dass eine Menge vollständig durch ihre Elemente festgelegt ist. Es gibt also keine zwei verschiedenen Mengen, die genau die gleichen Elemente haben. Das bedeutet, dass eine Menge im Gegensatz zu einem Tupel keine Ordnung für ihre Elemente festlegt, und dass ein Element nicht mehrfach in einer Menge vorkommen kann. Folglich stellen die Beschreibungen

$$\{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}, \quad \{\{\emptyset\},\ \emptyset\}, \quad \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \emptyset\}$$

alle dieselbe Menge dar.

Das **Wohlfundiertheitsaxiom** (5) besagt, dass die Baumdarstellung einer Menge keine unendlichen Pfade enthält. Das bedeutet, dass man bei einer Menge nach endlich vielen Abstiegen zu einem Element stets die leere Menge erreicht. Also terminiert die Prozedur

$$\mathit{steigeAb}(x)\colon \quad \text{if } x = \emptyset \text{ then stop else wähle } x' \in x\,;\, \mathit{steigeAb}(x')$$

für jede Menge x. Durch das Wohlfundiertheitsaxiom wird die Bildung von Mengen eingeschränkt. Insbesondere gilt, dass eine Menge erst gebildet werden kann, nachdem alle ihre Elemente gebildet sind.

Die **Konstituenten** einer Menge x sind wie folgt definiert:

1. Jedes Element von x ist eine Konstituente von x.
2. Jede Konstituente jedes Elements von x ist eine Konstituente von x.

Die Menge $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ hat ein Element ($\{\{\emptyset\}\}$) und 3 Konstituenten ($\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset\}$, $\emptyset$). Die Menge $\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}$ hat 3 Elemente und 3 Konstituenten. Jede Konstituente dieser Menge ist ein Element dieser Menge.

Proposition 6.1.1 Für jede Menge x gilt, dass jede Konstituente von x verschieden von x ist.

Beweis Durch Widerspruch. Sei x eine Menge, die sich selbst als Konstituente hat. Dann gilt gemäß der Definition von Konstituenten entweder $x \in x$ oder es existieren $x_1, \dots, x_n$ mit $x \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x$. Also kann man ausgehend von x unenendlich oft absteigen. Das widerspricht dem Wohlfundiertheitsaxiom. □

Proposition 6.1.2 Es gibt keine Mengen x und y, für die $x \in y$ und $y \in x$ gilt.

Beweis Durch Widerspruch. Sei $x \in y$ und $y \in x$. Dann ist x eine Konstituente von x. Das widerspricht Proposition 6.1.1. □

Eine Menge heißt **finitär**, wenn sie nur endlich viele Konstituenten hat. Anschaulich gesprochen ist eine Menge finitär, wenn ihre Baumdarstellung endlich ist. Jede finitäre Menge ist endlich, aber es gibt endliche Mengen, die **infinitär** sind (wenn x eine unendliche Menge ist, dann ist $\{x\}$ eine endliche aber infinitäre Menge). Eine Menge ist genau dann finitär, wenn sie und jede ihrer Konstituenten endlich ist.

Wir geben noch einige gebräuchliche Sprechweisen für Mengen an. Man sagt, dass eine Menge aus ihren Elementen **besteht**, oder dass eine Menge ihre Elemente **enthält**. Statt „x ist ein Element von X" sagt man auch kürzer „x **ist in** X". Unter einer **einelementigen Menge** versteht man eine Menge, die genau ein Element enthält. Allgemeiner versteht man unter einer n**-elementigen Menge** eine endliche Menge, die genau n verschiedene Elemente hat.

Eine Menge x heißt **Teilmenge** einer Menge y, wenn jedes Element von x ein Element von y ist. Wir schreiben $x \subseteq y$, um zu sagen, dass x eine Teilmenge von y ist. Statt $x \subseteq y$ schreiben wir auch $y \supseteq x$.

Unter einer **echten Teilmenge** einer Menge x verstehen wir eine Teilmenge von x, die verschiedenen von x ist. Wir schreiben $x \subset y$, um zu sagen, dass x eine echte Teilmenge von y ist. Statt $x \subset y$ schreiben wir auch $y \supsetneq x$.

Seien x und y Mengen. Dann heißt x (echte) **Obermenge** von y, wenn y eine (echte) Teilmenge von x ist.

Zwei Mengen x und y heißen **disjunkt**, wenn es keine Menge gibt, die sowohl ein Element von x als auch ein Element von y ist.

Wir schreiben $x \notin y$, um zu sagen, dass x kein Element der Menge y ist, und $x \nsubseteq y$, um zu sagen, dass x keine Teilmenge von y ist.

Aufgabe 6.1 Welches Axiom besagt, dass es keine Menge x mit $x \in x$ gibt? Warum folgt daraus, dass es keine Menge gibt, die alle Mengen enthält?

Aufgabe 6.2 Gibt es eine Menge, die 4 Elementen und 3 Konstituenten hat? Gibt es eine infinitäre Menge, die nur endlich viele Konstituenten hat?

Aufgabe 6.3 Geben Sie eine Menge an, die genau drei echte Teilmengen hat.

Aufgabe 6.4 Sei x eine Menge. Geben Sie eine echte Obermenge von x an.

Aufgabe 6.5 Geben Sie eine dreielementige Menge wie folgt an:

(i) Jede Konstituente der Menge ist ein Element der Menge.

(ii) Jede Konstituente der Menge ist eine einelementige Menge.

Stellen Sie diese Menge mit gescheiften Klammern $\{\dots\}$ und mit einem Baum dar. Können Sie auch eine vierelementige Menge mit diesen Eigenschaften angeben?

Aufgabe 6.6 In Standard ML können wir finitäre Mengen durch Bäume des Typs

```
datatype tree = T of tree list
```

darstellen. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, da ein Baum die Elemente einer Menge verschiedenen anordnen und mehrfach aufzählen kann. Beispielsweise stellen die Bäume $T[T[], T[], T[T[]]]$ und $T[T[T[]], T[]]$ dieselbe Menge dar.

a) Schreiben Sie eine Prozedur $equal : tree \to tree \to bool$, die testet ob zwei Bäume die gleiche Menge darstellen. Hinweis: Deklarieren Sie *equal* verschränkt rekursiv mit zwei Prozeduren *subset* und *member*, die für zwei Bäume t und t' testen, ob t eine Teilmenge von t' beziehungsweise ein Element von t' darstellt.

0	1	2	3	4	...
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\{\emptyset\}\}\}$	$\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$	...

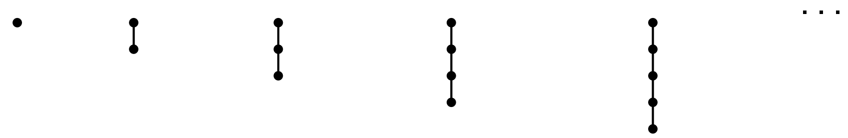


Abbildung 6.2: Eine Formalisierung der natürlichen Zahlen

b) Die Bäume des Typs *tree* können gemäß der lexikalischen Ordnung für Listen angeordnet werden. Schreiben Sie mithilfe der Prozedur *lex* aus Abbildung 4.4 eine Prozedur $compare : tree * tree \to order$, die diese Ordnung implementiert.

c) Geben Sie eine Teilklasse der Bäume des Typs *tree* an, mit deren Bäumen sich finitäre Mengen eindeutig darstellen lassen. Geben Sie eine Prozedur $set : tree \to bool$ an, die testet ob ein Baum zu dieser Klasse gehört.

6.2 Darstellung mathematischer Objekte durch Mengen

Es ist heute üblich, alle mathematischen Objekte durch Mengen darzustellen. Die Darstellung von Objekten durch Mengen bezeichnet man als **Formalisierung**. Durch die Formalisierung einer Objektklasse erreicht man, dass die Objekte der Klasse präzise und vollständig beschrieben sind. Dementsprechend besteht der erste Schritt bei der mathematischen Untersuchung einer Objektklasse in der Formalisierung ihrer Objekte.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Klasse der natürlichen Zahlen zu formalisieren. Abbildung 6.2 zeigt die einfachste: 0 wird durch die leere Menge dargestellt, und $n > 0$ durch die Menge $\{x\}$, wobei x die Darstellung von $n - 1$ ist. Als rekursive Prozedur können wir diese Darstellungsvorschrift wie folgt formulieren: $rep(n) =$ if $n = 0$ then $\emptyset$ else $\{rep(n-1)\}$.

Auch die reellen Zahlen können als Mengen dargestellt werden. Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Zahlen als Mengen dargestellt sind. Die genaue Form dieser Darstellung wird keine Rolle spielen.

Wir vereinbaren die folgenden Bezeichnungen für oft vorkommende Zahlen-mengen:

$\mathbb{B}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\{0, 1\}$	**Boolesche Werte**
$\mathbb{N}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	**Natürliche Zahlen**
$\mathbb{N}^+$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	**Positive natürliche Zahlen**
$\mathbb{Z}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	**Ganze Zahlen**
$\mathbb{R}$	$\overset{\text{def}}{=}$	Menge der reellen Zahlen	**Reelle Zahlen**

Wir gehen davon aus, dass die Darstellungen der Zahlen so gewählt sind, dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Außerdem werden wir für $m, n \in \mathbb{N}$ die Bezeichnung

$$\mathbb{N}[m,n] \overset{\text{def}}{=} \{m, m+1, \dots, n\}$$

für die Menge der natürlichen Zahlen von m bis n benutzen. Beispielsweise gilt $\mathbb{N}[3,6] = \{3,4,5,6\}$. Für $m > n$ gilt $\mathbb{N}[m,n] = \emptyset$.

Mit der Klasse der Mengen haben wir einen fixen Vorrat von mathematischen Objekten, der alle jemals zu betrachtenden mathematischen Objekte bereits enthält. Es geht also nicht darum, völlig neue mathematische Objekte zu erfinden. Stattdessen genügt es, aus der Klasse der Mengen interessante Teilklassen auszuwählen. Die Situation ist ähnlich wie bei der so genannten *Binärcodierung*, deren Existenz Computer ihre multimedialen Fähigkeiten verdanken. Mithilfe der Binärcodierung kann jeder Roman, jedes Bild und jedes Musikstück durch eine Folge von Nullen und Einsen dargestellt werden. Das bedeutet, dass es alle Romane, Bilder und Musikstücke, die es jemals geben wird, bereits gibt. Autoren „neuer" Kunstwerke wählen also lediglich unbekannte Werke aus dem bereits bekannten Vorrat aller Werke aus.

Aufgabe 6.7 Nehmen Sie an, dass es sich bei der Menge x um die Darstellung der Zahl 5 gemäß Abbildung 6.2 handelt. Geben Sie alle Konstituenten von x an.

6.3 Aussagen und logische Notationen

Unter einer mathematischen Aussage verstehen wir eine Eigenschaft mathematischer Objekte, die entweder *wahr* oder *falsch* ist. Ein typisches Beispiel für eine mathematische Aussage ist die Gleichung $1 + 1 = 3$. Statt wahr sagen wir auch *gültig* und statt falsch auch *ungültig*.

Wir verwenden die folgenden **logischen Notationen** für zusammengesetzte Aussagen (A und B sind Aussagen, X ist eine Menge):

$A \wedge B$	A und B	**Konjunktion**
$A \vee B$	A oder B	**Disjunktion**
$\neg A$	nicht A	**Negation**
$A \implies B$	wenn A, dann B	**Implikation**
$A \iff B$	A genau dann, wenn B	**Äquivalenz**
$\forall x \in X \colon A$	für alle $x \in X$ gilt A	**Universelle Quantifizierung**
$\exists x \in X \colon A$	es existiert $x \in X$ sodass A	**Existentielle Quantifizierung**

Die Bedeutung dieser Aussagen definieren wir wie folgt:

- $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind.
- $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind. Eine Disjunktion $A \vee B$ ist also genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist.
- $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.
- $A \implies B$ ist genau dann wahr, wenn $\neg A \vee B$ wahr ist. Eine Implikation $A \implies B$ ist also insbesondere dann wahr, wenn A falsch ist.
- $A \iff B$ ist genau dann wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder beide falsch sind.
- $\forall x \in X \colon A$ ist genau dann wahr, wenn A für alle $x \in X$ wahr ist. Dabei spielt x die Rolle einer Variablen. Wir vereinbaren, dass $\forall x \in X \colon A$ für den Extremfall $X = \emptyset$ wahr ist.
- $\exists x \in X \colon A$ ist genau dann wahr, wenn A für mindestens ein $x \in X$ wahr ist. Dabei spielt x die Rolle einer Variablen. Wir vereinbaren, dass $\exists x \in X \colon A$ für den Extremfall $X = \emptyset$ falsch ist.

Beachten Sie vor allem die Definitionen der Bedeutungen von disjunktiven und implikativen Aussagen. In der Umgangssprache werden „oder“ und „wenn dann“ manchmal mit anderer Bedeutung verwendet. Dagegen verwenden die mathematische Sprache „oder“ und „wenn dann“ nur mit der oben definierten Bedeutung.

Eine gültige Äquivalenz $A \iff B$ erlaubt es, die Gültigkeit von A zu beweisen, indem man die Gültigkeit von B beweist. Abbildung 6.3 gibt einige allgemein gültige Äquivalenzen an, die beim Beweisen nützlich sind. Allgemeingültigkeit bedeutet, dass diese Äquivalenzen für alle Aussagen A und B und für jede Menge X gültig sind.

Hier sind Beispiele für gültige Aussagen, die mithilfe logischer Notationen formuliert sind:

(1) Für alle Mengen X, Y gilt: $X = Y \iff (\forall x \in X \colon x \in Y) \wedge (\forall y \in Y \colon y \in X)$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N} \colon\ n = 0 \ \vee\ \exists m \in \mathbb{N} \colon\ m < n$.

Wir erwähnen noch einige allgemeine mathematische Begriffe, die wir entweder schon benutzt haben oder bald benutzen werden:

$$
\begin{array}{rcll}
\neg(A \wedge B) & \iff & \neg A \vee \neg B & \\
\neg(A \vee B) & \iff & \neg A \wedge \neg B & \\
A \Longrightarrow B & \iff & \neg A \vee B & \\
A \Longrightarrow B & \iff & \neg B \Longrightarrow \neg A & \textbf{Kontraposition} \\
\neg(A \Longrightarrow B) & \iff & A \wedge \neg B & \\
(A \iff B) & \iff & (A \Longrightarrow B) \;\wedge\; (B \Longrightarrow A) & \\
\neg\, \forall x \in X\colon A & \iff & \exists x \in X\colon \neg A & \\
\neg\, \exists x \in X\colon A & \iff & \forall x \in X\colon \neg A &
\end{array}
$$

Abbildung 6.3: Einige allgemein gültige Äquivalenzen

- **Primitive Begriffe** sind Begriffe, die nicht vollständig erklärt werden. Beispiele für primitive Begriffe sind Begriffe Menge und Aussage. Bei einer mathematischen Untersuchung versucht man, mit möglichst wenigen primitiven Begriffen auszukommen.
- **Definierte Begriffe** sind Begriffe, die mithilfe schon bekannter Begriffe vollständig erklärt werden. Beispiele für definierte Begriffe sind die Begriffe Graph, Relation und Funktion, die wir in diesem Kapitel definieren werden.
- **Notationen** sind symbolische Beschreibungen. Beispiele für Notationen sind die oben eingeführten logischen Notationen.
- **Axiome** sind Aussagen, die grundlegende Annahmen formulieren, die nicht bewiesen werden. Beispiele sind die Axiome für Mengen.
- **Sätze**, **Propositionen** und **Lemmata** sind Aussagen, die bewiesen werden können. Aussagen, deren Beweis relativ einfach ist, bezeichnen wir als Propositionen. Beweisbare Aussagen, die besonders wichtig sind, bezeichnen wir als Sätze. Beweisbare Aussagen, die nur eine Hilfsfunktion haben, bezeichnen wir als Lemmata.
- **Beweise** sind vollständige und nachvollziehbare Argumentationen, die zeigen, dass eine Aussage gültig ist. Das Ende eines Beweises markieren wir meistens mit dem Symbol $\square$.

Neue Notationen werden wir oft mithilfe der Symbole $\stackrel{\text{def}}{=}$ und $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ einführen.

6.4 Notationen für Mengen

Sei X eine Menge. Mit der Notation $\{\, x \in X \mid A(x) \,\}$ bezeichnen wir die Teilmenge von X, die aus allen $x \in X$ besteht, die die Eigenschaft $A(x)$ haben. Dabei spielt x die Rolle einer Variablen. Beispielsweise bezeichnet $\{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\colon\; n = 7m \,\}$

die Menge aller durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen.

Mit der Notation $\{\, x \mid A(x)\,\}$ bezeichnen wir die Menge aller Mengen x, die die Eigenschaft $A(x)$ haben. Mithilfe dieser Notation können wir den Schnitt, die Vereinigung und die Differenz zweier Mengen X, Y definieren:

$$X \cap Y \overset{\text{def}}{=} \{\, z \mid z \in X \ \wedge\ z \in Y \,\} \qquad \textbf{Schnitt}$$
$$X \cup Y \overset{\text{def}}{=} \{\, z \mid z \in X \ \vee\ z \in Y \,\} \qquad \textbf{Vereinigung}$$
$$X - Y \overset{\text{def}}{=} \{\, z \mid z \in X \ \wedge\ z \notin Y \,\} \qquad \textbf{Differenz}$$

Hier sind Beispiele:

$$\begin{aligned}
\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5\} &= \{3,4\} \\
\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5\} &= \{1,2,3,4,5\} \\
\{1,2,3,4\} - \{3,4,5\} &= \{1,2\}
\end{aligned}$$

Die **Potenz** einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X:

$$\mathcal{P}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\, Y \mid Y \subseteq X \,\}$$

Die Menge aller endlichen Teilmengen einer Menge X bezeichnen wir mit

$$\mathcal{P}_{\mathit{fin}}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\, Y \mid Y \subseteq X \ \wedge\ Y \text{ endlich} \,\}$$

Hier ist ein Beispiel für eine Potenz:

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$$

Aufgabe 6.8 Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an: $\mathbb{B}\cap\mathbb{Z}$, $\mathbb{B}\cup\mathbb{N}[4,6]$, $\mathbb{N}[0,4]-\mathbb{B}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}[1,3])$.

Aufgabe 6.9 Die natürlichen Zahlen lassen sich auch durch die Mengen

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}, \quad \cdots$$

darstellen. Diese Darstellung hat die Eigenschaft, dass jede Zahl n durch eine n-elementige Menge dargestellt wird, die zudem genau n Konstituenten hat. Außerdem gilt $m \le n$ genau dann, wenn die Darstellung von m eine Teilmenge der Darstellung von n ist.

Geben Sie eine rekursive Prozedur *rep* an, die zu $n \in \mathbb{N}$ die darstellende Menge liefert.

6.5 Tupel

Wir überlegen uns jetzt, wie wir geordnete Paare (x, y) durch Mengen darstellen können. Eine Darstellung durch die Menge $\{x, y\}$ ist nicht möglich, da wir damit die Ordnung zwischen den Komponenten verlieren und (x, y) nicht von (y, x) unterscheiden können. Dagegen funktioniert die Darstellung

$$(x, y) \quad \rightsquigarrow \quad \{\{x\},\ \{x, y\}\}$$

Die Korrektheit dieser Darstellung wird durch die folgende Proposition formuliert.

Proposition 6.5.1 Seien x, y, x', y' Mengen mit $\{\{x\},\ \{x, y\}\} = \{\{x'\},\ \{x', y'\}\}$. Dann gilt $x = x'$ und $y = y'$.

Beweis Durch Fallunterscheidung.

Sei $x = y$. Dann gilt nach Voraussetzung $\{x\} = \{\{x'\},\ \{x', y'\}\}$. Mit dem Gleichheitsaxiom folgt erst $\{x', y'\} = \{x\}$ und dann $x' = y' = x$. Also $x = x'$ und $y = y'$.

Sei $x \neq y$. Dann folgt $\{x\} = \{x'\}$ und $\{x, y\} = \{x', y'\}$ mit dem Gleichheitsaxiom aus der Voraussetzung. Mit dem Gleichheitsaxiom folgt erst $x = x'$ und dann $y = y'$ (da $x \neq y$). □

Jetzt ist es einfach, Tupel beliebiger Länge als Mengen darzustellen:

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \overset{\text{def}}{=} \{(1, x_1), \ldots, (n, x_n)\}$$

Hier sind Beispiele:

$$\begin{aligned} \langle\rangle &= \emptyset && \textbf{leeres Tupel} \\ \langle x\rangle &= \{(1, x)\} \\ \langle x, y\rangle &= \{(1, x),\ (2, y)\} \\ \langle x, y, z\rangle &= \{(1, x),\ (2, y),\ (3, z)\} \end{aligned}$$

Die Länge, die Komponenten und die Positionen von Tupeln definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} |\langle x_1, \ldots, x_n\rangle| &\overset{\text{def}}{=} n && \textbf{Länge} \\ \mathit{Com}\,\langle x_1, \ldots, x_n\rangle &\overset{\text{def}}{=} \{x_1, \ldots, x_n\} && \textbf{Komponenten} \\ \mathit{Pos}\,\langle x_1, \ldots, x_n\rangle &\overset{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\} && \textbf{Positionen} \end{aligned}$$

Tupel der Länge n bezeichnen wir als **n-stellige Tupel**. Wenn t ein Tupel mit $(i, x) \in t$ ist, bezeichnen wir x als die **i-te Komponente** von t.

Unter einem **Paar** verstehen wir im Folgenden ein Tupel mit 2 Positionen, und unter einem **Tripel** ein Tupel mit 3 Positionen. Die am Anfang dieses Abschnitts eingeführte Darstellung für Paare verwenden wir nur als Hilfskonstruktion für die Darstellung von Tupeln.

Tupel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ mit mindestens zwei Positionen schreiben wir auch mit runden Klammern: $(x_1, \dots, x_n)$.

Sei X eine Menge. Die Menge aller **Tupel über** X ist wie folgt definiert:

$$X^* \overset{\text{def}}{=} \{\, t \mid t \text{ Tupel mit } \mathit{Com}\, t \subseteq X \,\}$$

Es gilt $\emptyset^* = \{\langle\rangle\}$.

Das **Produkt von** $n \geq 0$ **Mengen** $X_1, \dots, X_n$ definieren wir als die Menge

$$X_1 \times \cdots \times X_n \overset{\text{def}}{=} \times\langle X_1, \dots, X_n \rangle \overset{\text{def}}{=} \{\, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \,\}$$

Die Elemente des Produkts sind n-stellige Tupel, deren i-te Komponente ein Element des i**-ten Faktors** X_i ist (für $i = 1, \dots, n$). Ein Produkt $X \times \cdots \times X$ aus $n \geq 0$ gleichen Faktoren X bezeichnen wir mit X^n. Hier sind Beispiele:

$$\begin{aligned}
\{1,2\} \times \{3,4\} &= \{\langle 1,3\rangle,\ \langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle,\ \langle 2,4\rangle\} \\
\mathbb{B}^2 &= \{\langle 0,0\rangle,\ \langle 0,1\rangle,\ \langle 1,0\rangle,\ \langle 1,1\rangle\} \\
\mathbb{N}^0 &= \{\langle\rangle\}
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass es sich bei $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ um verschiedene Mengen handelt: Während die erste Menge nur Tripel enthält, enthält die zweite Menge nur Paare.

Mit Tupeln können wir Listen und Bäume über einer Menge X darstellen. Wir folgen dabei den Darstellungen in § 4.1 und § 5.8:

$$\mathcal{L}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\langle\rangle\} \cup (X \times \mathcal{L}(X)) \qquad \textbf{Listen über } X$$

$$\mathcal{T}(X) \overset{\text{def}}{=} X \times \mathcal{L}(\mathcal{T}(X)) \qquad \textbf{Bäume über } X$$

Die in § 4.1 eingeführten Notationen *nil*, $x :: xs$ und $[x_1, \dots, x_n]$ werden wir auch für Listen über Mengen verwenden.

Sei X eine Menge, deren Elemente alle finitär sind (zum Beispiel $\mathbb{N}$). Dann ist jedes Tupel, jede Liste und jeder Baum über X finitär. Außerdem ist jede endliche Teilmenge von X finitär. Die Konstruktionen endliche Menge, Tupel, Liste und Baum erhalten also Finitarität.

Konstruktortypen in Standard ML entsprechen Mengen, die als sogenannte Summen gebildet werden. Die **Summe von** $n \geq 0$ **Mengen** $X_1, \dots, X_n$ definieren wir als die Menge

$$X_1 + \cdots + X_n \overset{\text{def}}{=} +\langle X_1, \dots, X_n \rangle \overset{\text{def}}{=} \{\, \langle i, x \rangle \mid i \in \{1, \dots, n\} \ \wedge\ x \in X_i \,\}$$

Die Elemente der Summe sind Paare $\langle i, x\rangle$, die aus einer **Variantennummer** $i \in \mathbb{N}$ und einem Element x des ***i*-ten Summanden** X_i bestehen. Hier ist ein Beispiel:

$$\{3,4\} + \{5,6\} = \{\langle 1,3\rangle,\ \langle 1,4\rangle,\ \langle 2,5\rangle,\ \langle 2,6\rangle\}$$

Aufgabe 6.10 Sei $x = \langle\{1,2\},\ \langle\rangle,\ 0\rangle$. Geben Sie eine Baumdarstellung für x an, bei der Tupel als Mengen und Zahlen als Zahlen dargestellt sind.

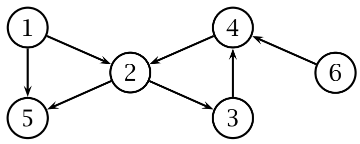
Aufgabe 6.11 Geben Sie die Elemente der Menge $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{B}^2 \cap (\mathbb{B} + \mathbb{B})$ an.

Aufgabe 6.12 Geordnete Paare können auch gemäß $(x, y) \rightsquigarrow \{x,\ \{x, y\}\}$ dargestellt werden. Beweisen Sie die Korrektheit dieser Darstellung. Hinweis: Für den Korrektheitsbeweis benötigen Sie das Wohlfundiertheitsaxiom. Verwenden Sie die Propositionen 6.1.1 und 6.1.2.

Überzeugen Sie sich davon, dass der Beweis von Proposition 6.5.1 die Korrektheit der Darstellung $(x, y) \rightsquigarrow \{\{x\},\ \{x, y\}\}$ ohne Benutzung des Wohlfundiertheitsaxioms zeigt.

6.6 Gerichtete Graphen

Ein Graph kann wie ein Baum mithilfe von Knoten und Kanten dargestellt werden. Anders als bei einem Baum können die Kanten eines Graphen aber nach Belieben gezogen werden. Hier ist ein Beispiel für einen Graphen:



Graphen tauchen bei der Analyse vieler praktischer Situationen auf. Stellen Sie sich die Flugverbindungen einer Fluglinie vor. Wir bekommen einen Graphen, wenn wir die Flughäfen als Knoten und die Flüge als Kanten modellieren.

Wir betrachten nur Graphen mit gerichteten Kanten. Eine Kante von einem Konten v zu einem Knoten v' stellen wir durch das Paar (v, v') dar. Damit bekommen wir die folgenden Definition:

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar (V, E), das aus einer Menge V und einer Menge $E \subseteq V \times V$ besteht. Die Elemente von V werden als die **Knoten** und die Elemente von E als die **Kanten** des Graphen bezeichnet. Für eine Kante (v, w) sagen wir, dass sie **von** v **nach** w **führt**.

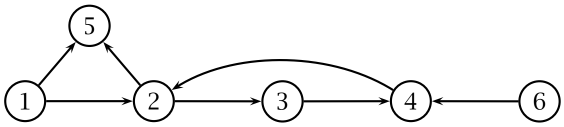
Der obige Beispielgraph wird gemäß dieser Definition durch das Paar (V, E) mit

$$V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$
$$E = \{(1,2),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,2),\ (6,4)\}$$

beschrieben. Die Wahl der Buchstaben V und E für die Mengen der Knoten und Kanten erklärt sich aus der Tatsache, das im Englischen Knoten als vertices und Kanten als edges bezeichnet werden.

Konvention Da wir nur gerichtete Graphen betrachten, bezeichnen wir sie der Kürze halber einfach als Graphen.

Bei der grafisch Darstellung von Graphen kann die Lage der Knoten frei gewählt werden. Man spricht vom **Layout eines Graphen**. Hier ist ein alternatives Layout für unseren Beispielgraphen:



Wir führen jetzt die wichtigsten Sprechweisen für Graphen an. Machen Sie sich für jede Sprechweise klar, wie sie mathematisch definiert ist und was sie anschaulich bedeutet. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Knoten w heißt **Nachfolger** eines Knotens v, wenn $(v, w) \in E$.
- Ein Knoten v heißt **Vorgänger** eines Knotens w, wenn $(v, w) \in E$.
- Zwei Knoten v und w heißen **benachbart** oder **adjazent**, wenn $(v, w) \in E$ oder $(w, v) \in E$.
- Ein **Pfad** ist ein nichtleeres Tupel $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Dabei wird $n - 1$ als die **Länge**, v_1 als der **Ausgangspunkt** und v_n als der **Endpunkt** des Pfades bezeichnet. Wir sagen auch, dass der Pfad **von** v_1 **nach** v_n **führt**.
- Ein Pfad heißt **einfach**, wenn er keinen Knoten mehrfach enthält.
- Ein Pfad $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ heißt **Zyklus**, wenn $n \geq 2$, $v_1 = v_n$ und $\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ einfach ist.
- Ein Knoten w ist von einem Knoten v aus **erreichbar**, wenn ein Pfad von v nach w existiert.
- Ein Knoten heißt **Wurzel**, wenn von ihm aus alle Knoten erreichbar sind.
- Ein Knoten heißt **Quelle** oder **initial**, wenn er keinen Vorgänger hat.
- Ein Knoten heißt **Senke** oder **terminal**, wenn er keinen Nachfolger hat.
- Ein Knoten heißt **isoliert**, wenn er initial und terminal ist.

Für unseren Beispielgraphen gilt:

- Vom Knoten 2 aus sind die Knoten 2, 5, 3 und 4 erreichbar.
- Vom Knoten 1 aus sind alle Knoten bis auf 6 erreichbar.
- Der Pfad $\langle 2, 3, 4, 2 \rangle$ ist ein Zyklus.
- Der Knoten 5 ist terminal und die Knoten 1 und 6 sind initial.
- Es gibt keine Wurzel und keinen isolierten Knoten.

Ein Graph heißt

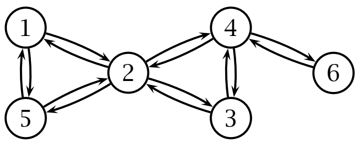
- **endlich**, wenn er nur endlich viele Knoten hat.
- **symmetrisch**, wenn er für jede Kante (v, w) auch die Kante (w, v) hat.
- **gewurzelt**, wenn er eine Wurzel hat.
- **zyklisch**, wenn er einen Zyklus enthält.
- **azyklisch**, wenn er keinen Zyklus enthält.

Unser Beispielgraph ist zyklisch und endlich und er ist weder gewurzelt noch symmetrisch.

Die **Größe** eines endlichen Graphen ist die Anzahl seiner Knoten. Die **Tiefe** eines endlichen Graphen mit mindestens einem Knoten ist die maximale Länge seiner einfachen Pfade. Unser Beispielgraph hat die Größe 6 und die Tiefe 3.

Man kann sich einen Graphen als ein Spielfeld vorstellen, auf dem Spielfiguren entlang der Kanten bewegt werden können (nur in Richtung der Kanten; denken Sie an das Spiel „Mensch Ärgere Dich nicht"). Pfade stellen mögliche Zugfolgen für Figuren dar. Aus der **Spielsicht** betrachtet sind endliche Graphen ohne Zyklen eher langweilig, da eine Figur nach einigen Schritten immer auf einem terminalen Knoten landet, den sie nicht mehr verlassen kann. Dagegen erlauben Graphen mit Zyklen interessante Spiele, da sie den Figuren eine Chance geben, terminale Knoten zu vermeiden.

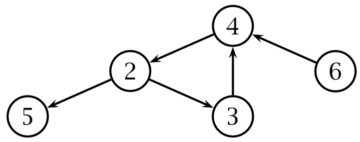
Den **symmetrische Abschluss** eines Graphen erhält man, indem man für jede Kante (v, v') die **inverse Kante** (v', v) hinzufügt. Hier ist der symmetrische Abschluss unseres Beispielgraphen:



Der symmetrische Abschluss eines Graphen ist immer symmetrisch.

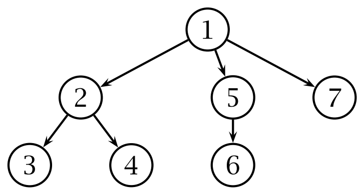
Ein Graph heißt **stark zusammenhängend**, wenn jeder seiner Knoten von jedem seiner Knoten aus erreichbar ist. Ein Graph heißt **zusammenhängend**,wenn sein symmetrischer Abschluss stark zusammenhängend ist. Unser Beispielgraph ist zusammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend.

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **Teilgraph** eines Graphen $G' = (V', E')$, wenn $V \subseteq V'$ und $E \subseteq E'$ gilt. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$. Der **von v aus erreichbare Teilgraph** von G besteht aus allen Knoten, die von v aus erreichbar sind, und aus allen Kanten zwischen diesen Knoten. Für unseren Beispielgraphen sieht der vom Knoten 6 aus erreichbare Teilgraph so aus:



Der von einem Knoten v aus erreichbare Teilgraph ist zusammenhängend und hat v als Wurzel.

Ein Graph heißt **baumartig**, wenn er gewurzelt ist und jeder seiner Knoten höchstens einen Vorgänger hat. Hier ist ein Beispiel für einen baumartigen Graphen:



Ein baumartiger Graph hat immer genau eine Quelle, die gleichzeitig auch die eindeutig bestimmte Wurzel des Graphen ist. Außerdem haben baumartige Graphen die charakteristische Eigenschaft, dass es von der Wurzel zu einem Knoten immer genau einen Pfad gibt.

Ein wichtiger Unterschied zwischen baumartigen Graphen und Bäumen (siehe § 6.5) besteht darin, das baumartige Graphen keine Ordnung für die Nachfolger eines Knotens vorgeben. Einen baumartigen Graphen mit der Knotenmenge V kann man als einen Baum über V darstellen, wenn man die Nachfolger der Knoten anordnet. Einen Baum über X kann man als einen baumartigen Graphen darstellen, indem man für jede Adresse a des Baums einen Knoten (a, x) einführt, der aus a und der zu a gehörigen Marke x besteht.

Die Begriffe Vorgänger und Nachfolger haben für Bäume und Graphen unterschiedliche Bedeutung: Ein Vorgänger [Nachfolger] in einem Graphen entspricht einem direkten Vorgänger [direkten Nachfolger] in einem Baum.

Aufgabe 6.13 Geben Sie Graphen wie folgt an:

a) Einen Graphen der Größe 3 mit 3 Wurzeln.
b) Einen Graphen der Größe 3 mit einer Quelle und zwei Senken.
c) Einen zusammenhängenden Graphen der Größe 4 mit zwei Quellen und zwei Senken.
d) Gibt es einen stark zusammenhängenden Graphen, der eine Quelle hat?

Aufgabe 6.14 Seien zwei Graphen $G = (V, E)$ gegeben:

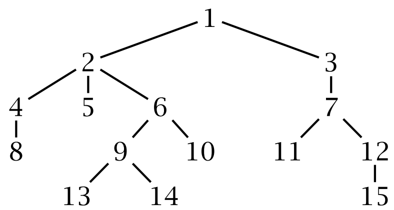
a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   $E = \{(1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (6, 2), (6, 3)\}$

b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   $E = \{(2, 7), (3, 1), (3, 6), (4, 2), (4, 3), (7, 5)\}$

Zeichnen Sie diese Graphen ohne überkreuzende Kanten. Beantworten Sie für jeden der Graphen die folgenden Fragen:

- Welche Größe und welche Tiefe hat der Graph?
- Welche Quellen, Senken und Wurzeln hat der Graph?
- Ist der Graph zyklisch? Wenn ja, geben Sie einen Zyklus an.
- Geben sie einen einfachen Pfad maximaler Länge an.
- Geben sie den vom Knoten 2 aus erreicbaren Teilgraphen an.
- Ist der Graph zusammenhängend? Stark zusammenhängend?
- Ist der Graph baumartig?

Aufgabe 6.15 Sei der folgende baumartige Graph gegeben:



Dabei seien alle Kanten von oben nach unten gerichtet.

a) Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E des Graphen an.
b) Geben Sie die Größe und Tiefe des Graphen an.
c) Geben Sie die Wurzel des Graphen an.
d) Geben Sie die terminalen Knoten des Graphen an.
e) Geben Sie für den Knoten 14 einen Pfad an, der von der Wurzel zu diesem Knoten führt. Gibt es mehrere solcher Pfade?
f) Zeichnen Sie alle Teilgraphen, die den Knoten 7 als Wurzel haben.
g) Geben Sie einen Teilgraphen an, der nicht baumartig ist.

6.7 Binäre Relationen

Eine **binäre Relation** ist eine Menge R, sodass jedes Element von R ein Paar ist.

Konvention Da wir nur binäre Relationen betrachten, bezeichnen wir sie der Kürze halber einfach als Relationen.

Die **Urbildmenge**, **Bildmenge** und **Komponentenmenge** einer Relation R definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathit{Dom}\,R &\stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid \exists y\colon (x,y) \in R \,\} && \textbf{Urbilder} \\ \mathit{Ran}\,R &\stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \mid \exists x\colon (x,y) \in R \,\} && \textbf{Bilder} \\ \mathit{Com}\,R &\stackrel{\text{def}}{=} \mathit{Dom}\,R \cup \mathit{Ran}\,R && \textbf{Komponenten} \end{aligned}$$

Die Kürzel *Dom* und *Ran* sind aus den englischen Bezeichnungen domain und range für die Urbildmenge und die Bildmenge abgeleitet. Wenn R das Paar (x,y) enthält, sagen wir, dass x ein **Urbild** von y und y ein **Bild** von x ist.

Unter einer **Relation auf einer Menge** X verstehen wir eine Relation R mit $\mathit{Com}\ R \subseteq X$. Die Relationen auf einer Menge X sind genau die Teilmengen von $X \times X$. Beachten Sie, dass die leere Menge eine Relation auf jeder Menge X ist.

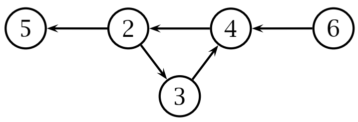
Die Kantenmenge jedes Graphen ist eine Relation. Umgekehrt kann man zu jeder Relation R den Graphen $(\mathit{Com}\,R,\ R)$ betrachten, dessen Kanten durch die Paare in R gegeben sind. Wir bezeichnen $(\mathit{Com}\,R,\ R)$ als den **Graphen für** R. Die zu Relationen gehörigen Graphen sind genau die Graphen, die keine isolierten Knoten haben.

Wenn wir wollen, können wir Relationen also als Graphen auffassen und die Begriffe für Graphen auf Relationen übertragen. Wir sprechen von der **Graphsicht** einer Relation. In der Graphsicht entsprechen Bilder Nachfolgern und Urbilder Vorgängern.

Als Beispiel betrachten wir die Relation

$$R = \{(2,3),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,2),\ (6,4)\}$$

Die **Graphdarstellung** dieser Relation sieht wie folgt aus:



Die Urbilder, Bilder und Komponenten von R ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathit{Dom}\,R &= \{2,\ 3,\ 4,\ 6\} \\ \mathit{Ran}\,R &= \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} \\ \mathit{Com}\,R &= \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \end{aligned}$$

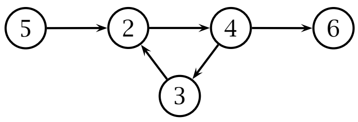
Relationen werden uns vor allem auch im Zusammenhang mit Prozeduren interessieren. Unter der **Ein-Ausgabe-Relation eine Prozedur** p verstehen wir die Menge aller Paare (x,y), sodass x ein zulässiges Argument für p ist und p für x das Ergebnis y liefert. Eine Prozedur stellt eine Berechnungsvorschrift für ihre Ein-Ausgabe-Relation dar.

6.7.1 Umkehrrelationen

Paare und Relationen sind symmetrische Objekte. Diese Symmetrie wird durch den Begriff der Umkehrrelation zum Ausdruck gebracht. Die Umkehrrelation R^{-1} einer Relation R erhält man, indem man alle Paare von R umkehrt:

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (x, y) \mid (y, x) \in R \,\}$$

Hier ist die Graphdarstellung der Umkehrrelation unserer Beispielrelation:



Statt Umkehrrelation sagt man auch **inverse Relation**. Offensichtlich gilt $(R^{-1})^{-1} = R$, $\mathit{Dom}\,(R^{-1}) = \mathit{Ran}\,R$ und $\mathit{Com}\,(R^{-1}) = \mathit{Com}\,R$.

6.7.2 Funktionale und injektive Relationen

Eine Relation R heißt **funktional**, wenn zu jedem $x \in \mathit{Dom}\,R$ genau ein $y \in \mathit{Ran}\,R$ existiert mit $(x, y) \in R$, und **injektiv**, wenn zu jedem $y \in \mathit{Ran}\,R$ genau ein $x \in \mathit{Dom}\,R$ existiert mit $(x, y) \in R$. Funktionalität und Injektivität sind symmetrische Begriffe: Eine Relation ist genau dann funktional, wenn ihre Umkehrrelation injektiv ist.

Aus der Graphsicht ist eine Relation genau dann funktional, wenn von keinem Knoten mehr als eine Kante ausgeht, und injektiv genau dann, wenn auf keinen Knoten mehr als eine Kante zeigt.

Aus der Prozedursicht ist eine Relation genau dann funktional, wenn es zu einem Argument höchstens ein Ergebnis gibt, und injektiv genau dann, wenn es für ein Ergebnis höchstens ein Argument gibt. Bisher haben wir nur Prozeduren betrachtet, deren Ein-Ausgabe-Relation funktional ist.

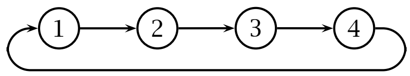
Unsere Beispielrelation ist weder funktional noch injektiv.

6.7.3 Totale und surjektive Relationen

Sei R eine Relation und X eine Menge. Dann heißt R **total auf** X, wenn $X \subseteq \mathit{Dom}\,f$, und **surjektiv auf** X, wenn $X \subseteq \mathit{Ran}\,f$.

Aus der Graphsicht ist eine Relation genau dann total auf X, wenn von jedem Element von X eine Kante ausgeht, und surjektiv auf X genau dann, wenn auf jedes Element von X eine Kante zeigt. Totalität und Surjektivität sind symmetrische Begriffe: Eine Relation ist genau dann surjektiv auf X, wenn ihre Umkehrrelation total auf X ist. Jede Relation R ist total auf $\mathit{Dom}\ R$ und surjektiv auf $\mathit{Ran}\,R$.

Hier ist die Graphdarstellung einer funktionalen und injektiven Relation, die total und surjektiv auf $\{1, 2, 3, 4\}$ ist:

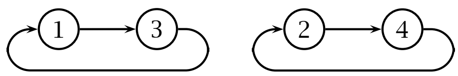


6.7.4 Komposition von Relationen

Die **Komposition** $R \circ R'$ zweier Relationen R und R' ist die wie folgt definierte Relation:

$$R \circ R' \overset{\text{def}}{=} \{ (x, z) \mid \exists (x, y) \in R\colon\ (y, z) \in R' \}$$

Die Komposition enthält ein Paar (x, z) also genau dann, wenn es eine gemeinsame Komponente y von R und R' gibt, sodass (x, y) eine Paar von R und (y, z) ein Paar von R' ist. Die Komposition der oben dargestellten Relation mit sich selbst ergibt die folgende Relation:



Diese Relation ist funktional, injektiv sowie total und surjektiv auf $\{1, 2, 3, 4\}$.

Proposition 6.7.1 Seien R, R' und R'' Relationen. Dann gilt:

(a) $R \circ (R' \circ R'') = (R \circ R') \circ R''$.

(b) $(R \circ R')^{-1} = R'^{-1} \circ R^{-1}$.

(c) Wenn R und R' funktional sind, dann ist $R \circ R'$ funktional.

(d) Wenn R und R' injektiv sind, dann ist $R \circ R'$ injektiv.

Die Komposition von Relationen ist also assoziativ (a), verträglich mit der Inversion (b) und erhält Funktionalität (c) und Injektivität (d).

Sei X eine Menge. Die **Identität auf** X ist die wie folgt definierte Relation:

$$Id(X) \overset{\text{def}}{=} \{ (x, x) \mid x \in X \}$$

Offensichtlich gilt $Id(X) = Id(X)^{-1} = Id(X) \circ Id(X)$. Außerdem ist $Id(X)$ funktional, injektiv sowie total und surjektiv auf X.

Proposition 6.7.2 Sei R eine Relation. Dann gilt:

(a) R ist genau dann funktional, wenn $R^{-1} \circ R = Id(Ran\, R)$.

(b) R ist genau dann injektiv, wenn $R \circ R^{-1} = Id(Dom\, R)$.

Aufgabe 6.16 Sei die Relation $R = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 4),\ (2, 5),\ (4, 1)\}$ gegeben.

a) Zeichnen Sie die Graphdarstellung der Relation.
b) Geben Sie die Mengen *Dom* R, *Ran* R und *Com* R an.
c) Ist R funktional? Injektiv? Total auf *Com* R? Surjektiv auf *Com* R?
d) Welche Paare müssen Sie entfernen, damit R funktional und injektiv wird?
e) Geben Sie die Umkehrrelation R^{-1} an.
f) Geben Sie die Komposition $R \circ R$ an.

6.8 Funktionen

Eine **Funktion** ist eine funktionale Relation.

Die charakteristische Eigenschaft einer Funktion f besteht darin, dass zu jedem Urbild $x \in \mathit{Dom}\, f$ genau ein Bild $y \in \mathit{Ran}\, f$ mit $(x, y) \in f$ existiert. Dieses Bild bezeichnen wir mit fx (sprich „f von x"). Die meisten Leute schreiben fx mit Klammern als $f(x)$. Das Objekt fx wird als der **Wert von** f **für** x bezeichnet. Man sagt, dass f für x den Wert fx **liefert**, und dass f den Wert x auf fx **abbildet**.

Die Urbildmenge einer Funktion bezeichnen wir als den **Definitionsbereich** der Funktion. Entsprechend sagen wir, dass eine Funktion f auf einem Objekt x **definiert** ist, wenn $x \in \mathit{Dom}\, f$ gilt. Eine Funktion f hat die Eigenschaft, dass sie jedem Objekt x, auf dem sie definiert ist, genau einen Wert fx **zuordnet**.

Der Begriff der Funktion ist nicht symmetrisch, da die Umkehrrelation einer Funktion im Allgemeinen keine Funktion ist. Wenn die Umkehrrelation einer Funktion eine Funktion ist, bezeichnen wir sie als **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion**. Die Umkehrrelation einer Funktion f ist genau dann eine Funktion, wenn f eine injektive Relation ist.

Hier ist ein Beispiel für eine endliche Funktion:

$$f = \{(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ (7,8)\}$$

Diese Funktion ist injektiv und hat die Graphdarstellung

$$1 \longrightarrow 2 \qquad 3 \longrightarrow 4 \qquad 5 \longrightarrow 6 \qquad 7 \longrightarrow 8$$

Aufgabe 6.17 Geben Sie die Umkehrfunktion der obigen Funktion an.

Proposition 6.8.1 Für jede injektive Funktion f gelten die folgenden Symmetrieeigenschaften:

(a) f^{-1} ist eine injektive Funktion.
(b) $\forall x, y \in \mathit{Dom}\, f\colon\ fx = fy \iff x = y$.
(c) $\forall x \in \mathit{Dom}\, f\colon\ f^{-1}(fx) = x$.
(d) $\forall y \in \mathit{Ran}\, f\colon\ f(f^{-1}y) = y$.

6.8.1 Beschreibung von Funktionen

Die Ein-Ausgabe-Relationen der bisher betrachteten Prozeduren sind immer Funktionen. Eine Prozedur ist also eine Berechnungsvorschrift, die eine Funktion beschreibt. Meistens ist es am einfachsten, eine Funktion durch die Angabe einer Prozedur zu beschreiben. Dabei verwenden wir statt Standard ML mathematische Notationen. Besonders nützlich ist die so genannten **Lambda-Notation**, die den Abstraktionen von Standard ML entspricht:

$$\begin{aligned}
\lambda\, n \in \mathbb{N}.\; n &= \{\, (n,n) \mid n \in \mathbb{N} \,\} \;=\; \mathit{Id}(\mathbb{N}) \\
&= \{(0,0),\; (1,1),\; (2,2),\; (3,3),\; \dots\} \\
\lambda\, x \in \mathbb{N}.\; x^2 &= \{\, (x,x^2) \mid x \in \mathbb{N} \,\} \\
&= \{(0,0),\; (1,1),\; (2,4),\; (3,9),\; \dots\} \\
\lambda\, (x,y) \in \mathbb{N}^2.\; x+y &= \{\, ((x,y),\, x+y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \,\} \\
&= \{((0,0),\,0),\; ((0,1),\,1),\; ((1,0),\,1), \\
&\qquad ((1,1),\,2),\; ((0,2),\,2),\; ((2,0),\,2),\; \dots\} \\
\lambda\, x \in \mathbb{Z}.\; \text{if } x \geq 0 \text{ then } x \text{ else } {-x} &= \{\, (x,|x|) \mid x \in \mathbb{Z} \,\} \\
&= \{(0,0),\; (1,1),\; (-1,1),\; \dots\}
\end{aligned}$$

Man kann eine Funktion auch zusammen mit einem Namen beschreiben. Beispielsweise beschreibt

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\text{ mit }\; fx = 3x$$

die Funktion $\lambda\, x \in \mathbb{R}.\; 3x$.

6.8.2 Funktionsmengen

Seien X und Y Mengen. Wir verwenden die folgenden Notationen:

$X \rightharpoonup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \mid f$ Funktion mit $\mathit{Dom}\, f \subseteq X$ und $\mathit{Ran}\, f \subseteq Y \}$
Funktionen von X nach Y

$X \to Y \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \mid f$ Funktion mit $\mathit{Dom}\, f = X$ und $\mathit{Ran}\, f \subseteq Y \}$
Totale Funktionen von X nach Y

$X \stackrel{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Y \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \mid f$ endliche Funktion mit $\mathit{Dom}\, f \subseteq X$ und $\mathit{Ran}\, f \subseteq Y \}$
Endliche Funktionen von X nach Y

Unter einer **Funktion** $X \to Y$ verstehen wir eine Funktion f mit $f \in X \to Y$.

Hier sind Beispiele für Funktionsmengen:

$$\mathbb{B} \rightharpoonup \mathbb{B} \;=\; (\mathbb{B} \to \mathbb{B}) \cup \{\, \emptyset,\;\; \{\langle 0,0\rangle\},\;\; \{\langle 0,1\rangle\},\;\; \{\langle 1,0\rangle\},\;\; \{\langle 1,1\rangle\}\,\}$$

$$\mathbb{B} \to \mathbb{B} \;=\; \{\, \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\},\;\; \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\},\;\; \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\},\;\; \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}\,\}$$

$$\mathbb{B} \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} \mathbb{B} \;=\; \mathbb{B} \rightharpoonup \mathbb{B}$$

Proposition 6.8.2 Seien X, Y, Z Mengen und f, g Funktionen. Dann gilt:

(a) $f \in X \rightharpoonup Y \;\wedge\; g \in Y \rightharpoonup Z \;\implies\; f \circ g \in X \rightharpoonup Z$

(b) $f \in X \to Y \;\wedge\; g \in Y \to Z \;\implies\; f \circ g \in X \to Z$

(c) $f \in X \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Y \;\wedge\; g \in Y \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Z \;\implies\; f \circ g \in X \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Z$

(d) $\forall x \in \mathit{Dom}\,(f \circ g)\colon\; (f \circ g)x = g(fx)$

6.8.3 Klammersparregeln

$$\begin{aligned}
X \times Y \to Z &\;\rightsquigarrow\; (X \times Y) \to Z \\
X \to Y \to Z &\;\rightsquigarrow\; X \to (Y \to Z) \\
fxy &\;\rightsquigarrow\; (fx)y \\
\lambda x \in X\, \lambda y \in Y.\, M &\;\rightsquigarrow\; \lambda x \in X.\, (\lambda y \in Y.\, M)
\end{aligned}$$

6.8.4 Unendliche Folgen

Sei X eine Menge. Eine **unendliche Folge über** X ist eine Funktion $f \in \mathbb{N} \to X$. Anschaulich können wir eine unendliche Folge f durch Aufzählen der ersten Elemente darstellen: $f0,\ f1,\ f2,\ f3,\ \dots$. Ein Beispiel ist die Folge $\lambda n \in \mathbb{N}.\, 2n+1$ der ungeraden natürlichen Zahlen: $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots$.

6.8.5 Adjunktion

Die **Adjunktion** zweier Funktionen f und g ist die wie folgt definierte Funktion:

$$f + g \;\overset{\text{def}}{=}\; \lambda x \in \mathit{Dom}\, f \cup \mathit{Dom}\, g.\;\; \text{if } x \in \mathit{Dom}\, g \text{ then } gx \text{ else } fx$$

Die Funktion $f + g$ verhält sich für alle Werte, auf denen g definiert ist, wie g. Für alle anderen Werte verhält sich $f + g$ wie f. Für jede Funktion f gilt $f + f = f$. Ein häufiger Spezialfall ist

$$f[x := y] \;\overset{\text{def}}{=}\; f + \{(x, y)\} \qquad \text{(lies „}f\text{ mit }x\text{ nach }y\text{“)}$$

Hier sind Beispiele:

$$\begin{aligned}\{(1,5),\ (2,6)\} + \{(2,7),\ (3,8)\} &= \{(1,5),\ (2,7),\ (3,8)\}\\ \{(1,5),\ (2,7),\ (3,8)\}[2:=0] &= \{(1,5),\ (2,0),\ (3,8)\}\\ (\lambda\, x \in \mathbb{N}.\ x+3)[7:=5] &= \lambda\, x \in \mathbb{N}.\ \text{if } x=7 \text{ then } 5 \text{ else } x+3\end{aligned}$$

Wir sind der Adjunktionsoperation übrigens schon in § 2.7 im Zusammenhang mit Umgebungen begegnet.

Aufgabe 6.18 Beschreiben Sie mithilfe der Lambda-Notation:

a) Eine unendliche Funktion, die nicht injektiv ist.
b) Eine injektive Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, die surjektiv auf $\mathbb{N}$ ist.
c) Eine injektive Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, die nicht surjektiv auf $\mathbb{N}$ ist.
d) Eine endliche Funktion, die infinitär ist.
e) Die unendliche Folge $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ der gerade natürlichen Zahlen.
f) Die unendliche Folge $4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$ der Quadrate der Zahlen ab 2.
g) Die unendliche Folge $9,\ 25,\ 49,\ 81,\ \ldots$ der Quadrate der ungeraden natürlichen Zahlen ab 3.

Aufgabe 6.19 Seien die Funktionen $f, g \in \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ wie folgt gegeben:

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$f(x,y)$	0	0	0	1
$g(x,y)$	0	1	1	1

a) Beschreiben Sie f und g mit der Lambda-Notation.
b) Beschreiben Sie $f[(1,1):=0]$ mit der Lambda-Notation.
c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv auf $\mathbb{B}$?
d) Geben Sie die Elemente der Menge f an.
e) Geben Sie die Elemente der Menge $f \circ g$ an.

Aufgabe 6.20 (Funktionswertige Funktionen) Sei die Funktion

$$f = \lambda\,(x,y) \in \mathbb{B}^2.\ \text{if } x = y \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

gegeben. Dann gibt es genau eine Funktion $f' \in \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B})$ mit

$$\forall x \in \mathbb{B}\ \forall y \in \mathbb{B}\colon\ f(x,y) = (f'x)\,y$$

a) Beschreiben Sie f' mit der Lambda-Notation.
b) Geben Sie die Elemente der Menge f' an.

6.8.6 Abbildungen

Viele Mathematikbücher verwenden anstelle des Begriffs der Funktion den Begriff der Abbildung. Eine **Abbildung** ist ein Tripel (X, f, Y), das aus zwei Mengen X und Y sowie einer totalen Funktion von X nach Y besteht. Dabei wird X als der Definitionsbereich, f als der **Graph** und Y als der **Wertebereich** der Abbildung bezeichnet. Abbildungen werden meistens mithilfe eines Namens beschrieben. Beispielsweise beschreibt

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ \text{ mit } \ f(x) = |x|$$

die Abbildung $\langle \mathbb{Z},\ (\lambda x \in \mathbb{Z}.\ |x|),\ \mathbb{Z}\rangle$. Beachten Sie, dass es sich bei $\langle \mathbb{Z},\ (\lambda x \in \mathbb{Z}.\ |x|),\ \mathbb{Z}\rangle$ und $\langle \mathbb{Z},\ (\lambda x \in \mathbb{Z}.\ |x|),\ \mathbb{N}\rangle$ um zwei verschiedene Abbildungen handelt, da sie verschiedene Wertebereiche haben. Eine Abbildung (X, f, Y) heißt **injektiv**, wenn f injektiv ist, **surjektiv**, wenn f auf Y surjektiv ist, und **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

6.8.7 Spezielle Funktionen für Zahlen

Wir definieren noch einige Funktionen für Zahlen, die wir später benötigen.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $y \in X$

- das **Minimum** von X genau dann, wenn $\forall x \in X\colon\ y \le x$.
- das **Maximum** von X genau dann, wenn $\forall x \in X\colon\ x \le y$.

Das Minimum [Maximum] von X bezeichnen wir mit $\min X$ [$\max X$], wenn es existiert.

Die Rundungsfunktionen **Floor** $\lfloor \_ \rfloor$ und **Ceiling** $\lceil \_ \rceil$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll} \lfloor \_ \rfloor \in \mathbb{R} \to \mathbb{Z} & \qquad \lceil \_ \rceil \in \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor = \max\{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \le x \,\} & \qquad \lceil x \rceil = \min\{\, z \in \mathbb{Z} \mid x \le z \,\} \end{array}$$

Die Funktionen **Modulo** und **ganzzahlige Division** kennen wir bereits aus Standard ML. Sie sind wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{mod} \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \to \mathbb{Z} & \qquad \mathrm{div} \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \to \mathbb{Z} \\ x \bmod y = x - \lfloor x/y \rfloor\, y & \qquad x \,\mathrm{div}\, y = \lfloor x/y \rfloor \end{array}$$

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $y \neq 0$ gilt:

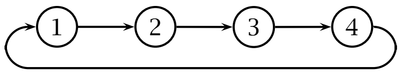
- $0 \le x \bmod y < y \quad$ falls $x \ge 0$ und $y > 0$.
- $x = (x \,\mathrm{div}\, y)y + (x \bmod y)$.

6.9 Terminierende Relationen

Unter einer terminierenden Relation verstehen wir eine Relation, die in der Graphsicht ein Spielfeld beschreibt, auf dem keine unendlichen Zugfolgen möglich sind. Wir interessieren uns für terminierende Relationen, da sich Terminierungseigenschaften von Prozeduren als Terminierungseigenschaften von Relationen analysieren lassen.

Wir wollen präzise definieren, was wir unter einer terminierenden Relation verstehen wollen. Sei R eine Relation. Ein **unendlicher Pfad in** R ist eine unendliche Folge p über $Com\,R$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ (pn,\ p(n+1)) \in R$. Der **Ausgangspunkt** eines unendlichen Pfades p ist $p0$. Wir sagen, dass eine Relation R für ein Objekt x **terminiert**, wenn es keinen unendlichen Pfad in R gibt, der von x ausgeht. Weiter sagen wir, dass eine Relation **terminiert**, wenn sie für jede ihrer Komponenten terminiert.

Beispiel 6.9.1 Die endliche Relation



terminiert für keine ihrer Komponenten. Von jeder ihrer Komponenten geht genau ein unendlicher Pfad aus. Der von der Komponente 1 ausgehende unendliche Pfad ist $\lambda n \in \mathbb{N}.\ 1 + (n \bmod 4)$.

Beispiel 6.9.2 Die unendliche Relation

$$R \;=\; \{\, (m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n \,\}$$

ist azyklisch. Trotzdem terminiert sie für keine ihrer Komponenten. Beispielsweise ist $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$ ein von 0 ausgehender unendlicher Pfad. Andererseits ist es jedoch so, dass die Umkehrrelation R^{-1} für jede ihrer Komponenten terminiert.

Aufgabe 6.21 Sei $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie für die obige Relation einen unendlichen Pfad an, der von der Komponente k ausgeht.

Proposition 6.9.1 Jede Teilmenge einer terminierenden Relation ist eine terminierende Relation.

Proposition 6.9.2 Eine endliche Relation terminiert genau dann, wenn sie azyklisch ist.

Die Terminierung einer Relation lässt sich oft dadurch beweisen, dass man sie in eine bereits als terminierend bekannte Relation einbettet. Seien R und R' Relationen. Wir sagen, dass eine Funktion

$$f \in Com\,R \to Com\,R'$$

die Relation R in die Relation R' **einbettet**, wenn gilt: $\forall (x,y) \in R\colon (fx, fy) \in R'$. Wenn es eine Funktion gibt, die R in R' einbettet, sagen wir, dass R in R' **einbettbar** ist.

Proposition 6.9.3 Jede Relation, die in eine terminierende Relation einbettbar ist, terminiert.

Beweis Durch Widerspruch. Seien R und R' Relationen, sodass R' terminiert. Sei $f \in \mathit{Com}\, R \to \mathit{Com}\, R'$ eine Funktion, die R in R' einbettet. Sei $p \in \mathbb{N} \to \mathit{Com}\, R$ ein unendlicher Pfad in R. Dann ist $p \circ f$ ein unendlicher Pfad in R'. Widerspruch, da R' als terminierend angenommen wurde. $\square$

Beispiel 6.9.3 Wir betrachten die Relationen

$$R = \{\, ((x,y),\ (x',y')) \in (\mathbb{N}^2)^2 \mid x + y > x' + y' \,\}$$
$$R' = \{\, (x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y \,\}$$

Offensichtlich terminiert R'. Die Funktion $f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x,y) = x + y$ ist eine Einbettung von R in R'. Also terminiert auch R.

Aufgabe 6.22 Seien zwei Relationen gegeben:

$$R_1 = \{\, ((x,y),\ (x',y')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{R})^2 \mid x > x' \wedge\ y < y' \,\}$$
$$R_2 = \{\, ((x,y),\ (x',y')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^2 \mid x + y > x' + y' \geq -150 \,\}$$

Zeigen Sie die Terminierung dieser Relationen, indem sie Einbettungen in die Menge $\{\, (x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y \,\}$ angeben.

6.10 Ordnungen

Eine Ordnung für eine Menge stellt ein Kriterium dar, gemäß dem die Elemente der Menge sortiert werden können. Sortieren ist dabei als Anordnen gemäß der Ordnung zu verstehen. Für Zahlen und Listen haben wir dieses Thema bereits in Kapitel 4 behandelt. Jetz führen wir das Standardmodell für allgemeine Ordnungen ein, das Ordnungen als Relationen formalisiert.

Hier sind Beispiele für Ordnungsbeziehungen:

- Die Zahl 3 ist kleiner als die Zahl 7.
- Die Menge $\{1,2\}$ ist eine echte Teilmenge der Menge $\{1,2,3\}$.
- Die Menge $\{2\}$ ist eine Konstituente der Menge $\{\{1,\ \{2\}\},\ 7,\ \{3,5\}\}$.

Die diesen Beispielen zugrunde liegenden Ordnungen formalisieren wir wie folgt:

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Die **natürliche Ordnung für** X ist die Relation

$$NO(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \in X^2 \mid x \leq y \}$$

- Sei X eine Menge. Die **Inklusionsordnung für** $\mathcal{P}(X)$ ist die Relation

$$IO(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \in (\mathcal{P}(X))^2 \mid x \subseteq y \}$$

- Sei X eine Menge. Die **strukturelle Ordnung für** X ist die Relation

$$SO(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \in X^2 \mid x = y \text{ oder } x \text{ ist Konstituente von } y \}$$

Sei R eine Relation. Wir vereinbaren die folgenden Notationen:

$R^{\prec} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \in R \mid x \neq y \}$ **strikte Basis von** R, „R kleiner“

$R^{\succ} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \in R^{-1} \mid x \neq y \}$ **striktes Inverses von** R, „R größer“

Offensichtlich gilt $R^{\succ} = (R^{\prec})^{-1}$.

Wir definieren eine Reihe von Eigenschaften, die für Ordnungen eine Rolle spielen. Eine Relation R heißt

- **reflexiv**, wenn $Id(Com\,X) \subseteq R$. Reflexivität bedeutet, dass R für jede Komponente x das Paar (x, x) enthält.
- **strikt**, wenn $R = R^{\prec}$. Striktheit bedeutet, das R kein Paar (x, x) enthält.
- **transitiv**, wenn $R \circ R \subseteq R$. Transitivität bedeutet, dass R unter Pfadbildung abgeschlossen ist.
- **antisymmetrisch**, wenn $R^{-1} \cap R \subseteq Id(Com\,X)$. Antisymmetrie bedeutet, dass für $x \neq y$ höchstens eines der Paare (x, y) und (y, x) in R ist.
- **linear**, wenn für alle $x, y \in Com\,R$ mit $x \neq y$ gilt, dass mindestens eines der Paare (x, y) und (y, x) in R ist.
- **wohlfundiert**, wenn $R^{\succ}$ terminiert.

Eine Relation R heißt **partielle Ordnung**, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Eine partielle Ordnung heißt **lineare Ordnung**, wenn sie linear ist. Unter einer partiellen [linearen] **Ordnung für eine Menge** X verstehen wir eine partielle [lineare] Ordnung R mit $Com\,R = X$.

Die oben eingeführten Ordnungen haben die folgenden Eigenschaften:

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge von reellen Zahlen. Dann ist die natürliche Ordnung $NO(X)$ eine lineare Ordnung für X. Wenn $X \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Menge von ganzen Zahlen ist (d. h. es gibt eine Zahl u mit $\forall x \in X \colon u \leq x$), dann ist $NO(X)$ wohlfundiert.
- Sei X eine Menge. Dann ist die Inklusionsordnung $IO(X)$ eine partielle Ordnung für $\mathcal{P}(X)$. Wenn X endlich ist, ist $IO(X)$ wohlfundiert. Wenn X mindestens zwei Elemente enthält, ist $IO(X)$ nicht linear.

- Sei X eine Menge. Dann ist die strukturelle Ordnung $SO(X)$ eine partielle Ordnung für X, die wohlfundiert ist.

Für partielle Ordnungen R vereinbaren wir die folgenden Notationen und Sprechweisen:

$x \preceq_R y$	$\overset{\text{def}}{\iff}$	$(x, y) \in R$	x **kleiner-gleich** y **in** R
$x \succeq_R y$	$\overset{\text{def}}{\iff}$	$y \preceq_R x$	x **größer-gleich** y **in** R
$x \prec_R y$	$\overset{\text{def}}{\iff}$	$x \preceq_R y \wedge x \neq y$	x **kleiner** y **in** R
$x \succ_R y$	$\overset{\text{def}}{\iff}$	$y \prec_R x$	x **größer** y **in** R

Zwei Objekte x, y heißen **vergleichbar in** R, wenn $x \preceq_R y$ oder $x \succeq_R y$ gilt. Eine partielle Ordnung R ist genau dann linear, wenn alle Komponenten von R in R vergleichbar sind.

Sei R eine partielle Ordnung und $X \subseteq \mathit{Com}\, R$. Dann heißt $y \in \mathit{Com}\, R$

- **größtes Element von** X **bez.** R, wenn $y \in X$ und $\forall x \in X\colon\ x \preceq_R y$.
- **maximales Element von** X **bez.** R, wenn $y \in X$ und $\neg\exists x \in X\colon\ y \prec_R x$.
- **obere Schranke von** X **bez.** R, wenn $\forall x \in X\colon\ x \preceq_R y$.

Die Begriffe **kleinstes Element**, **minimales Element** und **untere Schranke** sind symmetrisch definiert. Beachten Sie, dass eine Menge bezüglich einer Ordnung höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element hat.

Proposition 6.10.1 Sei R eine partielle Ordnung, $X \subseteq \mathit{Com}\ R$ und $y \in \mathit{Com}\ R$. Dann ist y genau dann das größte [kleinste] Element von X, wenn y ein maximales [minimales] Element und eine obere [untere] Schranke von X ist.

Aufgabe 6.23 Geben Sie präzise Definitionen für die Begriffe kleinstes Element, minimales Element und untere Schranke an.

Aufgabe 6.24 Geben Sie eine endliche partielle Ordnung R an, sodass $\mathit{Com}\ R$ zwei maximale und zwei minimale Elemente hat.

Aufgabe 6.25 Geben Sie eine lineare Ordnung R und eine nichtleere Menge $X \subseteq \mathit{Com}\, R$ an, sodass X eine untere und eine obere Schranke hat, aber weder minimale noch maximale Elemente.

6.10.1 Hasse-Diagramme und transitiver Abschluss

Die direkte graphische Darstellung endlicher Ordnungen ist nicht sehr erhellend, da die Eigenschaften Reflexivität und Transitivität die Existenz sehr vieler eigentlich überflüssiger Kanten erzwingen. Wenn man die überflüssigen Kanten

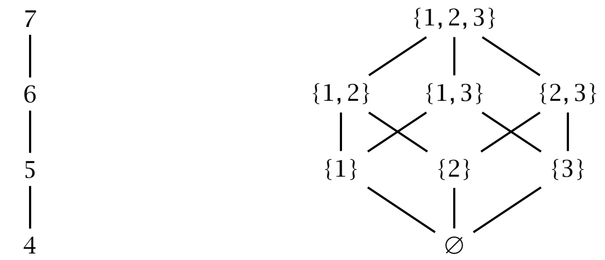


Abbildung 6.4: Hasse-Diagramme für $NO(\{4,5,6,7\})$ und $IO(\{1,2,3\})$

weglässt, erhält man brauchbare Darstellungen von endlichen Ordnungen, die als **Hasse-Diagramme** bezeichnet werden. Abbildung 6.4 zeigt zwei Beispiele.

Es ist lehrreich, den Zusammenhang zwischen Ordnungen und ihren Hasse-Diagrammen genauer zu betrachten. Formal gesehen ist ein Hasse-Diagram ein azyklischer Graph mit einer bestimmten Minimalitätseigenschaft. Hasse-Diagramme werden so gezeichnet, dass alle Kanten von unten nach oben gerichtet sind. Das bedeutet, dass kleinere Elemente weiter unten und größere Elemente weiter oben erscheinen.

Um den Zusammenhang zwischen einer Ordnung und ihrem Hasse-Diagramm präzise zu machen, benötigen wir den **transitiven Abschluss** einer Relation R:

$$R^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\,(x,y) \mid \exists \text{ Pfad von } x \text{ nach } y \text{ im Graph } (\mathit{Com}\,R, R)\,\}$$

Offensichtlich ist R^+ eine transitive Relation mit $R \subseteq R^+$. Wir sagen, dass **ein Graph** (V,E) **eine Relation** R **darstellt**, wenn $R = \mathit{Id}(V) \cup E^+$.

Proposition 6.10.2 Sei G ein Graph, der die Relation R darstellt. Dann gilt:

(a) Die Komponenten von R sind genau die Knoten von G.

(b) R ist reflexiv und transitiv.

(c) R ist genau dann eine partielle Ordnung, wenn G azyklisch ist.

Sei R eine partielle Ordnung. Das Hasse-Diagramm von R ist gerade der kleinste Graph $(\mathit{Com}\,R, E)$, der R darstellt. Man kann zeigen, dass zu jeder Ordnung ein eindeutig bestimmter kleinster Graph existiert, der sie darstellt.

Aufgabe 6.26 Geben Sie das Hasse-Diagramm einer möglichst kleinen Ordnung R an, sodass $\mathit{Com}\,R$ zwei minimale und drei maximale Elemente hat. Hinweis: Sie benötigen 4 Knoten und zwei 2 Kanten.

Aufgabe 6.27 Geben Sie eine endliche Relation R an, zu der kein eindeutig bestimmter kleinster Graph existiert, der sie darstellt.

6.10.2 Inverse und lexikalische Ordnungen

Proposition 6.10.3 Sei R eine partielle [lineare] Ordnung für eine Menge X. Dann ist R^{-1} eine partielle [lineare] Ordnung für X.

Das **lexikalische Produkt** zweier Relationen R_1 und R_2 definieren wir wie folgt:

$$R_1 \otimes R_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in (\mathit{Com}\, R_1 \times \mathit{Com}\, R_2)^2 \mid \\ (x_1,y_1) \in R_1 \ \wedge \ (x_1 \neq y_1 \vee (x_2,y_2) \in R_2) \}$$

Proposition 6.10.4 Für alle partiellen Ordnungen R_1, R_2 gilt:

(a) $R_1 \otimes R_2$ ist eine partielle Ordnung für $\mathit{Com}\, R_1 \times \mathit{Com}\, R_2$.

(b) Wenn R_1 und R_2 linear sind, dann ist $R_1 \otimes R_2$ linear.

(c) Wenn R_1 und R_2 wohlfundiert sind, dann ist $R_1 \otimes R_2$ wohlfundiert.

Aufgabe 6.28 In § 4.10 haben wir gesehen, wie lineare Ordnungen in Standard ML durch Prozeduren dargestellt werden können. Mit einem zusätzlichen Ordnungszustand U (undefined) können wir auch partielle Ordnungen darstellen:

```
datatype parOrderState = L | E | G | U
type 'a parOrder = 'a * 'a -> parOrderState
```

Die eine partielle Ordnung darstellende Prozedur liefert für ein Paar (x,y) genau dann U, wenn weder (x,y) noch (y,x) in der Ordnung ist. Wenn (x,y) in der Ordnung ist, wird L (less) geliefert, fall $x \neq y$, und E (equal), falls $x = y$. Wenn keiner der bisherigen Fälle zutrifft und das inverse Paar (y,x) in der Ordnung ist, wird G (greater) geliefert.

a) Schreiben Sie eine Prozedur $\mathit{convert} : (\alpha * \alpha \to \mathit{order}) \to \alpha\ \mathit{parOrder}$, die die Darstellung einer linearen Ordnung in die Darstellung einer partiellen Ordnung konvertiert.

b) Schreiben Sie eine Prozedur $\mathit{invert} : \alpha\ \mathit{parOrder} \to \alpha\ \mathit{parOrder}$, die zu einer partiellen Ordnung die inverse partielle Ordnung liefert.

c) Schreiben Sie eine Prozedur $\mathit{prod} : \alpha\ \mathit{parOrder} \to \alpha\ \mathit{parOrder} \to \alpha\ \mathit{parOrder}$, die das lexikalische Produkt zweier partiellen Ordnungen liefert.

d) Schreiben Sie eine Prozedur $\mathit{lex} : \alpha\ \mathit{parOrder} \to \alpha\ \mathit{list}\ \mathit{parOrder}$, die zu einer partiellen Ordnung die ihr entsprechende lexikalische Ordnung für Listen liefert.

6.11 Bijektionen, Isomorphie und Kardinalität

Sei f eine Funktion $X \to Y$. Dann können wir uns die Elemente von X als Beschreibungen für die Elemente von Y vorzustellen. Dabei gilt:

- Jedes Element von X beschreibt genau ein Element von Y.
- Wenn f surjektiv auf Y ist, kann jedes Element von Y durch ein Element von X beschrieben werden.
- Wenn f injektiv ist, kann kein Element von Y durch mehr als ein Element von X beschrieben werden.

Unter einer **Bijektion** $X \to Y$ verstehen wir eine injektive Funktion $X \to Y$, die surjektiv auf Y ist. Eine Bijektion $f\colon X \to Y$ stellt eine symmetrische Situtation her, da ihre Umkehrfunktion eine Bijektion $Y \to X$ ist:

$$X \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

Die Elemente von X und Y entsprechen sich dabei eineindeutig: Jedes Element von Y wird durch genau ein Element von X beschrieben, und jedes Element von X wird durch genau ein Element von Y beschrieben. Die Existenz einer Bijektion zwischen zwei Mengen ist so bedeutsam, dass es dafür einen eigenen Begriff gibt:

Zwei Mengen X, Y heißen **isomorph** ($X \cong Y$), wenn es eine Bijektion $X \to Y$ gibt.

Isomorphie ist eine symmetrische, reflexive und transitive Beziehung:

- Wenn $X \cong Y$, dann auch $Y \cong X$, da die Umkehrfunktion einer Bijektion $X \to Y$ eine Bijektion $Y \to X$ ist.
- Für jede Menge X gilt $X \cong X$, da $Id(X)$ eine Bijektion $X \to X$ ist.
- Wenn $X \cong Y$ und $Y \cong Z$, dann $X \cong Z$, da die Komposition zweier Bijektionen $X \to Y$ und $Y \to Z$ eine Bijektion $X \to Z$ ist.

Beispiel 6.11.1 Im Sport ist es üblich, eine Zeitdauer durch ein Tripel (h, m, s) mit Stunden, Minuten und Sekunden anzugeben (siehe auch Aufgabe 1.13). Beispielsweise beschreibt das Tupel $(2, 6, 7)$ die Zeitdauer 2 Stunden, 6 Minuten und 7 Sekunden. Formal können wir diesen Zusammenhang wie folgt darstellen:

$$X = \mathbb{N}^3, \quad Y = \mathbb{N}, \quad f = \lambda\,(h, m, s) \in X.\; 60(60h + m) + s$$

Da f surjektiv auf Y ist, kann jede Zeitdauer in Y durch ein Tripel in X beschrieben werden. Da f nicht injektiv ist, können bestimmte Zeitdauern durch mehr als ein Tripel in X beschrieben werden. Wenn wir die zulässigen Tripel gemäß

$$X' = \mathbb{N} \times \mathbb{N}[0, 59] \times \mathbb{N}[0, 59]$$

einschränken, bekommen wir eine Bijektion $X' \to Y$:

$$f' = \lambda\,(h,m,s) \in X'.\; 60(60h + m) + s$$

Damit kann jede Zeitdauer in Y durch genau ein Tripel in X' beschrieben werden.

Proposition 6.11.1 Sei X eine Menge. Dann $X^* \cong \mathcal{L}(X)$.

Beweis $\lambda\,(x_1, \dots, x_n) \in X^*.\; [x_1, \dots, x_n]$ ist eine Bijektion $X^* \to \mathcal{L}(X)$. □

6.11.1 Kardinalität endlicher Mengen

Sei X eine endliche Menge. Die Anzahl der Elemente von X heißt **Kardinalität von** X und wird mit $|X|$ bezeichnet. Beispielsweise gilt $|\emptyset| = 0$ und $|\{0,1\}| = 2$. Isomorphie und Kardinalität von Mengen sind eng miteinander verwoben:

Proposition 6.11.2 Wenn zwei Mengen isomorph sind, dann sind sie entweder beide endlich oder beide unendlich.

Proposition 6.11.3 Zwei endliche Mengen sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Kardinalität haben.

Die folgenden Propositionen helfen bei der Bestimmung von Kardinalitäten:

Proposition 6.11.4 Seien X und $X_1, \dots, X_n$ endliche Mengen. Dann sind die Potenz $\mathcal{P}(X)$, das Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ und die Summe $X_1 + \cdots + X_n$ endliche Mengen, deren Kardinalitäten sich wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}(X)| &= 2^{|X|} \\
|X_1 \times \cdots \times X_n| &= |X_1| \cdot \cdots \cdot |X_n| \\
|X_1 + \cdots + X_n| &= |X_1| + \cdots + |X_n|
\end{aligned}$$

Proposition 6.11.5 Seien X, Y Mengen. Weiter sei X endlich und $\perp$ ein Objekt, das nicht in Y ist. Dann gilt:

(a) $(X \to Y) \cong Y^{|X|}$

(b) $(X \rightharpoonup Y) \cong (Y \cup \{\perp\})^{|X|}$

Beweis Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine n-elementige Menge. Dann ist

$$\lambda f \in X \to Y.\; \langle f x_1, \dots, f x_n \rangle$$

eine Bijektion $(X \to Y) \to Y^{|X|}$. Sei $g = (\lambda x \in X.\; \perp)$. Dann ist

$$\lambda f \in X \rightharpoonup Y.\; \langle (g + f) x_1, \dots, (g + f) x_n \rangle$$

eine Bijektion $(X \rightharpoonup Y) \to (Y \cup \{\perp\})^{|X|}$. □

Beispiel 6.11.2 Die Kardinalität der Menge $\mathbb{B} \times (\mathcal{P}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B})$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{B} \times (\mathcal{P}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B})| &= |\mathbb{B}| \cdot |\mathcal{P}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}| && \text{Proposition 6.11.4} \\
&= 2|\mathbb{B}|^{|\mathcal{P}(\mathbb{B})|} && \text{Proposition 6.11.5 und 6.11.3} \\
&= 2 \cdot 2^{(2^{|\mathbb{B}|})} && \text{Proposition 6.11.4} \\
&= 2 \cdot 2^{(2^2)} = 32
\end{aligned}$$

Zweistellige Operationen können entweder **kartesisch** mit Funktionen des Typs $X \times Y \to Z$ oder **kaskadiert** mit Funktionen des Typs $X \to Y \to Z$ dargestellt werden (siehe auch § 3.1). Die Gleichwertigkeit dieser Darstellungen zeigt sich auch in der Isomorphie der entsprechenden Funktionsmengen:

Proposition 6.11.6 Sei X, Y und Z Mengen. Dann gilt:

$$X \times Y \to Z \quad \cong \quad X \to Y \to Z$$

Beweis Die Funktion

$$\lambda f \in X \times Y \to Z.\, \lambda x \in X.\, \lambda y \in Y.\, f(x, y)$$

ist eine Bijektion $(X \times Y \to Z) \to (X \to Y \to Z)$. □

Aufgabe 6.29 Bestimmen Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen:

a) $\mathcal{P}(\mathbb{B} + (\mathbb{B} \times \mathbb{B}))$

b) $\mathbb{N}[1,3] \to \mathbb{N}[1,5]$

c) $\mathbb{N}[1,3] \rightharpoonup \mathbb{N}[1,5]$

d) $\mathbb{B} \rightharpoonup \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

6.12 Induktionsbeweise

Um Eigenschaften von rekursiven Datenstrukturen und rekursiven Prozeduren zu zeigen, benötigen wir eine Beweistechnik, die als Induktion bezeichnet wird.[1] Die Essenz dieser Beweistechnik wird durch den sogenannten Induktionssatz formuliert:

Satz 6.12.1 (Induktion) Seien X, A Mengen und $\succ$ eine terminierende Relation. Dann folgt aus

$$\forall x \in X\colon \ (\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A) \ \Longrightarrow\ x \in A$$

dass $\forall x \in X\colon\ x \in A$ gilt.

[1] Solche Beweise werden wir in Kapitel 7 führen.

Die Formulierung des Satzes macht von der Konvention Gebrauch, für eine Relation R statt $(x, y) \in R$ kürzer xRy zu schreiben.

Beweis Gelte $(*)$ $\forall x \in X\colon (\forall y \in X\colon x \succ y \implies y \in A) \implies x \in A$. Wir zeigen $\forall x \in X\colon\ x \in A$ durch Widerspruch. Sei $\neg(\forall x \in X\colon\ x \in A)$. Dann ist $X - A$ nichtleer. Da $\succ$ eine terminierende Relation ist, können wir ein „kleinstes" $x \in X - A$ wählen, sodass $\forall y \in X - A\colon\ \neg(x \succ y)$. Also $\forall y \in X\colon\ x \succ y \implies y \in A$. Also folgt mit der Annahme $(*)$, dass $x \in A$. Widerspruch zu $x \in X - A$. □

Wir erklären jetzt die Anwendung des Induktionssatzes. Nehmen Sie an, dass X und A Mengen sind, und dass wir die folgende Aussage beweisen wollen:

$$\forall x \in X\colon\ x \in A$$

Der Induktionssatz erlaubt uns, diese Aussage dadurch zu zeigen, dass wir eine terminierende Relation $\succ$ wählen und die erweiterte Aussage

$$\forall x \in X\colon\ \ (\forall y \in X\colon\ x \succ y \implies y \in A)\ \implies\ x \in A$$

beweisen. Dies können wir gemäß des folgenden Schemas tun:[2]

> Sei $x \in X$ und $\forall y \in X\colon\ x \succ y \implies y \in A$.
> *Zu zeigen:* $x \in A$.

Für den Beweis von $x \in A$ können wir also neben der Annahme $x \in X$ zusätzlich die so genannte **Induktionsannahme**

$$\forall y \in X\colon\ x \succ y \implies y \in A$$

verwenden. Diese besagt, dass $y \in A$ für alle $y \in X$ gilt, die „kleiner" als x sind (d.h. $x \succ y$). Insgesamt liefert uns der Induktionssatz also das folgende Beweisschema:

Gegeben Zwei Mengen X und A und eine terminierende Relation $\succ$.

Behauptung $\forall x \in X\colon x \in A$.

Beweis Sei $x \in X$ und $\forall y \in X\colon\ x \succ y \implies y \in A$ (Induktionsannahme).
Zu zeigen: $x \in A$.

Im Rahmen eines Induktionsbeweises bezeichnen wir X als **Grundmenge**, A als **Aussagemenge** und $\succ$ als **Induktionsrelation**.

Um Schreibarbeit zu sparen, verzichtet man in der Praxis meistens auf die explizite Formulierung der Induktionsannahme und schreibt die Einleitung des Beweises wie folgt:

[2] Um eine allquantifizierte Implikation $\forall x \in X\colon\ P \implies Q$ zu beweisen, kann man $x \in X$ und P annehmen und dann Q zeigen.

Gegeben Zwei Mengen X und A und eine terminierende Relation $\succ$.

Behauptung $\forall x \in X \colon x \in A$.

Beweis Durch Induktion über $x \in X$ gemäß $\succ$.
Zu zeigen: $x \in A$.

Darüberhinaus verzichtet man in vielen Fällen auf die explizite Angabe der Aussagemenge und der Induktionsrelation. Bei einer nach unten beschränkten Grundmenge $X \subseteq \mathbb{Z}$ wird, falls nichts anderes vereinbart wird, stillschweigend $NO(X)^{\succ}$ als Induktionsrelation verwendet. Wir betrachten ein Beispiel.

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n < 2^n$.

Beweis Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $n = 0 < 1 = 2^0 = 2^n$.

Sei $n > 0$. Aus der Induktionsannahme folgt $n - 1 < 2^{n-1}$. Also $n = n - 1 + 1 < 2^{n-1} + 1 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$. □

Die dem Beweis zugrundeliegende Grundmenge ist $\mathbb{N}$, die Aussagemenge ist $\{\, n \in \mathbb{N} \mid n < 2^n \,\}$, die Induktionsrelation ist $NO(\mathbb{N})^{\succ} = \{\, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m > n \,\}$, und die Induktionsannahme ist $\forall m \in \mathbb{N}\colon\ n > m \Longrightarrow m < 2^m$.

Induktionsbeweise enthalten typischerweiser eine Fallunterscheidung. Der obige Beweis unterscheidet zwischen $n = 0$ und $n > 0$. Die Induktionsannahme wird nur für den Fall $n > 0$ verwendet. Da der Induktionssatz die Fallunterscheidung nicht vorgibt, kann ihr Format je noch Beweisproblem frei gewählt werden. Hier ist ein zweites Beispiel.

Behauptung Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Beweis Durch Induktion über $n \geq 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

n ist eine Primzahl. Dann ist die Behauptung tivial.

n ist keine Primzahl. Dann $n = ab$ für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq a, b < n$. Aus der Induktionsannahme folgt, dass a und b als Produkte von Primzahlen darstellbar sind. Also ist $n = ab$ als Produkt von Primzahlen darstellbar. □

Wir sprechen von **natürlicher Induktion**, wenn es sich bei der Grundmenge um eine nach unten beschränkte Teilmenge X der ganzen Zahlen und bei der Induktionsrelation um $NO(X)^{\succ}$ handelt.

Sei X eine Menge und $f \in X \to \mathbb{N}$. Dann ist $\{\, (x, y) \in X^2 \mid fx > fy \,\}$ eine terminierende Relation. Induktionsbeweise, die gemäß einer so konstruierten Induktionsrelation geführt werden, bezeichnen wir als **quasinatürlich**.

Eine endliche Menge mit n Elementen hat bekanntlich 2^n Teilmengen. Diese Tatsache kann mit quasinatürlicher Induktion bewiesen werden.

Behauptung Sei X eine endliche Menge. Dann gilt: $\forall T \in \mathcal{P}(X)\colon\ |\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

Beweis Durch Induktion über $T \in \mathcal{P}(X)$ gemäß $|T|$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $|T| = 0$. Dann $T = \emptyset$ und $\mathcal{P}(T) = \{\emptyset\}$. Also $|\mathcal{P}(T)| = 1 = 2^0 = 2^{|T|}$.

Sei $|T| > 0$. Sei $x \in T$ und $T' = T - \{x\}$. Dann

$$\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(T') \cup \{\, S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{P}(T')\,\}$$

und folglich

$$|\mathcal{P}(T)| = |\mathcal{P}(T')| + |\{\, S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{P}(T')\,\}| = |\mathcal{P}(T')| + |\mathcal{P}(T')| = 2|\mathcal{P}(T')|$$

Da $T' \in \mathcal{P}(M)$ und $|T| > |T'| = |T| - 1$, folgt aus der Induktionsannahme, dass $|\mathcal{P}(T')| = 2^{|T'|}$. Also $|\mathcal{P}(T)| = 2|\mathcal{P}(T')| = 2 \cdot 2^{|T'|} = 2 \cdot 2^{|T|-1} = 2^{|T|}$. $\square$

Dieser Induktionsbeweis verwendet die Grundmenge $\mathcal{P}(X)$ und die Induktionsrelation $\{\, (S,T) \in \mathcal{P}(X)^2 \mid |S| > |T|\,\}$.

Aufgabe 6.30 Beweisen Sie mit Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon\ n^3 - n = 3k$. Geben Sie die Ihrem Beweis zugrunde liegende Grundmenge, Aussagemenge, Induktionsrelation und Induktionsannahme an.

Aufgabe 6.31 Was ist an dem folgenden Induktionsbeweis verkehrt? Geben Sie zunächst die Induktionsannahme an.

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 2^n = 1$.

Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $2^n = 2^0 = 1$.

Sei $n > 0$. Aus der Induktionsannahme folgt $2^{n-1} = 1$ und $2^{n-2} = 1$. Also $2^n = \frac{2^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$.

Bemerkungen

Als Begründer der Mengenlehre gilt Georg Cantor (1845-1918). Sein Interesse galt vor allem der systematischen Erforschung unendlicher Mengen. Die Idee, alle mathematischen Objekte als Mengen darzustellen, entwickelte sich nach 1900. Kazimierz Kuratowski stellte 1921 geordnete Paare durch Mengen und Funktionen durch Mengen geordneter Paare dar. Das Wohlfundiertheitsaxiom wurde 1925 von John von Neumann formuliert. Es schränkt die Bildung von Mengen so ein, dass die Russellsche Antinomie gegenstandslos wird. Der Begriff der Funktion wird René Descartes (1596–1650) zugeschrieben. Graphen wurden erstmals von Leornard Euler (1707–1783) betrachtet (Königsberger Brückenproblem). Die durch den Induktionssatz beschriebene allgemeine Form des Induktionsbeweises (oft als wohlfundierte Induktion bezeichnet) wurde von Emmy Noether (1882-1935) erfunden.

Wenn Sie mit den Begriffen und der mathematischen Sprache dieses Kapitels Schwierigkeiten haben, empfehle ich Ihnen das didaktisch ausgezeichnete Buch von Rosen.[3] Diese sanfte Einführung in die diskrete Mathematik ist speziell auf die Bedürfnisse der Informatik ausgerichtet und setzt nur ein bescheidenes Maß an mathematischer Kompetenz voraus. Es eignet sich hervorragend zum Selbststudium.

Verzeichnis

Mengen (Menge besteht aus ihren Elementen, Menge enthält ihre Elemente, $x \in X$, $x \notin X$, x ist in X; leere Menge $\emptyset$; endliche und unendliche Mengen; n-elementige Mengen $\{x_1, \dots, x_n\}$; Konstituenten, finitäre und infinitäre Mengen; Gleichheitsaxiom, Wohlfundiertheitsaxiom; Baumdarstellung; Inklusionsbeziehung, (echte) Teilmengen, (echte) Obermengen, $X \subseteq Y$, $X \subset Y$; Disjunktheit; Notationen $\{\, x \mid A(x)\,\}$ und $\{\, x \in X \mid A(x)\,\}$; Schnitt $X \cap Y$; Vereinigung $X \cup Y$; Differenz $X - Y$; Potenzen $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{P}_{fin}(X)$; Isomorphie $X \cong Y$; Kardinalität $|X|$).

Formalisierung.

Aussagen A (Konjunktion $A \wedge B$, Disjunktion $A \vee B$, Negation $\neg A$, Implikation $A \Longrightarrow B$, Äquivalenz $A \Longleftrightarrow B$, universelle Quantifizierung $\forall x \in X\colon A$, existentielle Quantifizierung $\exists x \in X\colon A$).

Primitive Begriffe, definierte Begriffe, Notationen, Axiome, Sätze, Propositionen, Lemmata und Beweise.

Definition von Notationen mit $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ und $\overset{\text{def}}{=}$.

Zahlen ($\mathbb{B}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}[m,n]$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$; Minimum und Maximum; Floor $\lfloor x \rfloor$ und Ceiling $\lceil x \rceil$; ganzzahlige Division $x \operatorname{div} y$ und Modulo-Funktion $x \bmod y$).

Tupel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ (Länge, Komponenten, Positionen; i-te Komponente; leeres Tupel $\langle\rangle$; n-stellige Tupel, Paare, Tripel; Tupel über X, X^*; Listen $\mathcal{L}(X)$; Bäume $\mathcal{T}(X)$; Produkte $X \times Y$, X^n, Faktoren; Summen $X + Y$, Summanden, Variantennummern).

Gerichtete Graphen $G = (V, E)$ (Knoten, Kanten; Nachfolger, Vorgänger; Quellen (initiale Knoten), Senken (terminale Knoten), isolierte Knoten; Pfade (Ausgangs-

[3] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications.* Fifth Edition, McGraw-Hill, 2003.

und Endpunkt, Länge, einfach, Zyklus); Erreichbarkeit und Wurzeln; endlich, symmetrisch, gewurzelt, zyklisch, azyklisch; Größe und Tiefe von endlichen Graphen; symmetrischer Abschluss, inverse Kante, (stark) zusammenhängend; (erreichbarer) Teilgraph; baumartige Graphen).

Binäre Relationen R (Urbildmenge $\mathit{Dom}\,R$, Bildmenge $\mathit{Ran}\,R$, Komponentenmenge $\mathit{Com}\ R$; Bild von x und Urbild von y; Relation auf X; Graph für R, Graphsicht und Graphdarstellung; Ein-Ausgabe-Relation einer Prozedur; Umkehrrelation R^{-1}, inverse Relation; funktional, injektiv; total, surjektiv; Komposition $R \circ R'$; Identität $\mathit{Id}(X)$ auf X; terminierend, unendliche Pfade, einbettbar).

Funktionen f (f bildet x auf fx ab, f ordnet x den Wert fx zu, f liefert für x den Wert fx, f ist auf x definiert; Definitionsbereich; Umkehrfunktion und inverse Funktion; Lambda-Notation $\lambda x \in X.\, M$; Funktionsmengen $X \rightharpoonup Y$, $X \to Y$ und $X \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Y$; Funktionen $X \to Y$; Klammersparregeln; unendliche Folgen; Adjunktion $f + g$ und $f[x{:=}\, y]$; Abbildungen (X, f, Y) (Definitionsbereich, Graph, Wertebereich; injektiv, surjektiv, bijektiv)).

Ordnungen (partielle und lineare Ordnungen; natürliche Ordnung $\mathit{NO}(X)$, Inklusionsordnung $\mathit{IO}(X)$, srukturelle Ordnungen $\mathit{SO}(X)$; reflexive, strikte, transitive, antisymmetrische, lineare und wohlfundierte Relationen; strikte Basis $R^{\prec}$ und striktes Inverses $R^{\succ}$; $\preceq_R$, $\prec_R$, $\succeq_R$, $\succ_R$ und vergleichbare Objekte; minimale, maximale, kleinste und größte Elemente; untere und obere Schranken; Hasse-Diagramme; transitiver Abschluss R^+; lexikalisches Produkt).

Bijektionen, Isomorphie und Kardinalität.

Induktion (Induktionssatz; Grundmenge, Aussagemenge, Induktionsrelation, Induktionsannahme; natürliche und quasinatürliche Induktion).