5. Übungsblatt zu Informatik 1 WS 98/99

Andreas Rossberg, Prof. Gert Smolka

Abgabe: 27. November 1998 vor der Vorlesung

Hinweis: Aufgabe 5.2 und 5.4(d) bitte *zusätzlich* per Email abgeben.

Aufgabe 5.1: Effizienz der Exponentiation (4 Punkte)

In den Aufgaben 1.3(a) und 3.1 haben Sie zwei verschiedene Prozeduren zur Exponentiation natürlicher Zahlen implementiert, `exp` und `fastexp`.

(a) Welche der beiden Prozeduren ist linearrekursiv, welche endrekursiv?

(b) Geben Sie jeweils den Platz- und Zeitbedarf der beiden Prozeduren an (mit Θ).

Aufgabe 5.2: Transformation in Endrekursion (4 Punkte)

Betrachten Sie folgende Deklarationen:

```
fun plus(m,n) = if n = 0 then m else plus(m,n-1) + 1
fun mal(m,n)  = if m = 0 then 0 else plus(n, mal(m-1,n))
```

Transformieren Sie die Funktionen `plus(n,m)` und `mal(n,m)` in endrekursive Formen `plusit(n,m)` und `malit(n,m,k)`, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{plusit}(n,m) &= \mathsf{plus}(n,m) \\ \mathsf{malit}(n,m,0) &= \mathsf{mal}(n,m) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion sollen dabei ebenfalls nur mit dem Summanden `1` vorkommen.

Aufgabe 5.3: Umbenennung und Verdeckung (4 Punkte)

(a) Wagen Sie einen Blick auf das folgende Programm:

```
fun f(x,y) = op-(y,x);
fun g(x)   = ~(f(x,3));
g(9);
```

Was sind konsistente Umbenennungen für dieses Programm? Begründen Sie ggf. *kurz*, warum das nicht der Fall ist.

(i)
```
fun f(n,m) = op-(n,m);
fun h(k)   = ~(f(k,3));
h(9);
```

(ii)
```
fun f(g,h) = op-(h,g);
fun g(f)   = ~(f(x,3));
g(9);
```

(iii)
```
fun p(op*,op+) = op-(op+,op* );
fun op-(op-)   = ~(p(op-,3));
op-(9);
```

(iv)
```
fun f(a,b)     = minus(b,a);
fun g(c)       = ~(f(c,3));
g(d);
```

(b) Nehmen Sie im wirren Programm aus Aufgabe 4.2 Umbenennungen so vor, dass es für keinen Identifikator mehr als ein definierendes Auftreten gibt.

Aufgabe 5.4: Abwandlung der Fibonacci-Funktion (5 Punkte)

Gegeben sei folgende Prozedur:

```
fun f(n) = if n < 3 then n else 1*f(n-1) + 2*f(n-2) + 3*f(n-3)
```

(a) Für welche $n \in \mathbf{Z}$ terminiert die Prozedur?

(b) Zeichnen Sie den Rekursionsbaum für `f(5)`.

(d) Geben Sie eine endrekursive MML-Prozedur an, die dieselbe Funktion berechnet. Welche Kosten (Laufzeit und Platzbedarf) hat die neue Prozedur?

Aufgabe 5.5: Ackermann-Funktion (6+1 Punkte)

Die folgende Prozedur berechnet die von Logikern ersonnene *Ackermann-Funktion*:

```
fun a(x,y) = if      y = 0 then 0
             else if x = 0 then 2*y
             else if y = 1 then 2
             else                a(x-1, a(x,y-1))
```

(a) Was sind die Werte von `a(1,10)`, `a(2,4)` und `a(3,3)`?

(b) Welche mathematischen Funktionen berechnen die folgenden Prozeduren?

(i) `fun f(n) = a(0,n)`

(ii) `fun g(n) = a(1,n)`

(iii⋆) `fun h(n) = a(2,n)`

(c) Für welche Werte `n` kann Moscow ML den Ausdruck `a(2,n)` noch auswerten, ohne dass mit einem Fehler (*overflow exception*) abgebrochen wird?

Aufgabe 5.6: Größenordnungen (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus dem Skript:

(i) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f)$

(ii) $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in \Theta(g)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

(i) $2 + 2\log n \in O(\log n)$

(ii) $\Theta(n^2 + n^{1.5}) = \Theta(n^2)$

(iii) $3^n \in O(2^n)$

(iv) $2^n \in \Theta(3^n)$