8. Übungsblatt zu Programmierung 1, WS 2012/13

Prof. Dr. Gert Smolka, Sigurd Schneider, B.Sc.
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws12/

Lesen Sie im Buch: Kapitel 9

Aufgabe 8.16 Geben Sie die folgenden Mengen an:

a) $\mathit{Dom}\ (\lambda x \in \mathbb{N}.\ x^2)$
b) $\mathit{Ran}\ (\lambda x \in \mathbb{N}.\ x^2)$

Aufgabe 9.2 Bleiben die Wohlgeformtheitsbedingungen für die definierenden Gleichungen gültig, wenn man bei der Prozedur

a) *fac* den Ergebnisbereich zu $\mathbb{Z}$ verändert?
b) *fac* den Ergebnisbereich zu $\mathbb{N}_+$ verändert?
c) *fac* den Argumentbereich und den Ergebnisbereich zu $\mathbb{Z}$ verändert?
d) *fac′* den Argumentbereich zu $\mathbb{N}$ verändert?
e) *euclid* den Ergebnisbereich zu $\mathbb{N}_+$ verändert?
f) *gcd* den Argumentbereich zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und den Ergebnisbereich zu $\mathbb{N}$ verändert?

Aufgabe 9.3 Geben Sie die Anwendungsgleichungen für die folgenden Anwendungen der Beispielprozeduren an:

a) $\mathit{fib}\ 7$
b) $\mathit{euclid}(63, 35)$
c) $\mathit{gcd}(35, 21)$

Aufgabe 9.5 Geben Sie eine Prozedur $\mathit{euclid}' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an, die *euclid* erweitert und deren definierenden Gleichungen ohne Konditionale formuliert sind.

Aufgabe 9.6, leicht variiert Geben Sie die Rekursionsrelation der Prozedur *fac′* an.

Aufgabe 9.7 Geben Sie eine terminierende und baumrekursive Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die für jedes Argument das Ergebnis 0 liefert.

Aufgabe 9.14, leicht variiert Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \\ &p(x, y) = \text{ if } x < y \text{ then } p(x,\ y-1) \text{ else} \\ &\qquad\qquad\ \text{if } x > y \text{ then } p(x-1,\ y) \text{ else } x \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Rekursionsrelation von p an.
b) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.

Aufgabe 9.15 Beweisen Sie, dass die Ergebnisfunktion f der Prozedur *fib* die Gleichung $2 \cdot f(n+1) = f(n+3) - fn$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Zusatzaufgabe Z9.1 Geben Sie jeweils eine Prozedur $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Rekursionsrelation $\{(n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ an, sodass

a) p linear-rekursiv ist,
b) p baumrekursiv ist,
c) p die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ n$ berechnet,
d) p die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ 0$ berechnet.

Aufgabe 9.17 Machen Sie sich mithilfe der folgenden Beispiele klar, dass aus der Ergebnisfunktion einer Prozedur nicht ermittelt werden kann, welchen Argument- und Ergebnisbereich die Prozedur hat und ob sie rekursiv ist.

a) Geben Sie eine Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Ergebnisfunktion $\emptyset$ hat.
b) Geben Sie eine rekursive Prozedur $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ 0$ berechnet.

Aufgabe 9.20 Zeigen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ &pn = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } p(n-1) + 2n + 1 \end{aligned}$$

die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\ (n+1)^2$ berechnet.

Aufgabe 9.24 Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ &p(x, y) = \ \text{if } x = 0 \text{ then } y \text{ else} \\ &\qquad\qquad \text{if } y = 0 \text{ then } x \text{ else} \\ &\qquad\qquad \text{if } x \le y \text{ then } p(x-1,\ y+1) \text{ else } p(x+1,\ y-1) \end{aligned}$$

die Funktion $\lambda\, (x, y) \in \mathbb{N}^2.\ x + y$ berechnet.

Aufgabe 9.26 Geben Sie eine rekursive Prozedur $p : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$ an, die für $n \in \mathbb{N}_+$ die Summe $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ berechnet. Beweisen Sie, dass Ihre Prozedur die Funktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}_+.\ n^2$ berechnet.

Aufgabe 9.29 Sie sollen zeigen, dass die Prozeduren

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ &p\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } p(x-1) + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ &q\ x = \text{if } x < 1 \text{ then } 0 \text{ else } \frac{x}{2}(x+1) \end{aligned}$$

semantisch äquivalent sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Geben Sie natürliche Terminierungsfunktionen für p und q an.
b) Geben Sie die Ergebnisfunktion von q an.
c) Zeigen Sie, dass die Ergebnisfunktion von q die definierende Gleichung von p für alle $x \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

Zusatzaufgabe Z9.2 Geben Sie eine mathematische Prozedur $p : X \to Y$ an, sodass jede Funktion $f : X \to Y$ die definierende Gleichung von p erfüllt.