Prof. Dr. Gert Smolka, Sigurd Schneider, B.Sc.
www.ps.uni-saarland.de/courses/prog-ws12/

Lesen Sie im Buch: Kapitel 10

Aufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass *iter* und die unten definierte Prozedur *iter′* semantisch äquivalent sind.

$$\begin{aligned}&\mathit{iter}' : \mathbb{N} \times X \times (X \to X) \to X\\&\mathit{iter}'(0, x, f) = x\\&\mathit{iter}'(n, x, f) = f(\mathit{iter}'(n-1,\ x,\ f)) \quad \text{für } n > 0\end{aligned}$$

Aufgabe 10.4 Man kann Proposition 10.2 auch ohne die Benutzung der Vertauschungseigenschaft beweisen. Dazu zeigt man die allgemeinere Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall s \in \mathbb{Z}\colon\quad \mathit{iter}(n,\ s,\ \lambda a.\, a\cdot x) = s\cdot x^n\ .$$

Beweisen Sie diese Aussage durch Induktion.

Aufgabe 10.5 Seien *fac*, *iter* und f wie in Abschnitt 10.2.2 auf S. 203 gegeben. Beweisen Sie:

a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ f(n+1,\ \mathit{fac}\ n) = (n+2,\ \mathit{fac}(n+1))$
b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ (n+1,\ \mathit{fac}\ n) = \mathit{iter}(n,\ (1,1),\ f)$

Für den Beweis von (a) benötigen Sie nur die Definitionen von f und *fac*. Der Beweis von (b) gelingt mit Induktion sowie Teil (a) und Proposition 10.1 auf S. 202. Orientieren Sie sich am Beweis von Proposition 10.2 auf S. 202.

Aufgabe 10.13 (Hardtsche Identität) Betrachten Sie die Prozedur

$$\begin{aligned}&p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\&p\ 0\ =\ 0\\&p\ 1\ =\ 1\\&p\ n\ =\ p(n-1) + p(p(n-1) - p(n-2)) \quad \text{für } n > 1\end{aligned}$$

Wegen der geschachtelten Rekursion lässt sich die Terminierung der Prozedur nicht ohne Information über die Ergebnisfunktion der Prozedur zeigen. Beweisen Sie durch natürliche Induktion, dass die Prozedur die Identitätsfunktion $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$ berechnet.

Aufgabe 10.14 Sei die folgende Prozedur gegeben:

$$\begin{aligned}&p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}\\&p(x,y) = 0 \quad \text{für } x > y\\&p(x,y) = x + p(x+1, y) \quad \text{für } x \le y\end{aligned}$$

a) Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für p an.

b) Zeigen Sie durch Induktion: $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x \leq y\colon\quad p(x, y) = p(x, y-1) + y.$

Aufgabe 10.15 Geben Sie für die Prozedur *rev* die Rekursionsfunktion, die Rekursionsrelation sowie eine natürliche Terminierungsfunktion an.

Aufgabe 10.16 Sei X eine Menge. Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass für alle Listen xs, $ys \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

a) $|xs@ys| = |xs| + |ys|$
b) $|rev\, xs| = |xs|$

Zusatzaufgabe Z10.1 Seien X, Y Mengen. Wir formulieren die mathematische Prozedur *map* wie folgt:

$$\begin{aligned} &map \in (X \to Y) \to \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(Y) \\ &map\ f\ nil \;=\; nil \\ &map\ f\ (x :: xr) \;=\; f x :: map\ f\ xr \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass für alle $f \in X \to Y$ und $xs, ys \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

a) $map\ f\ (xs@ys) = (map\ f\ xs)@(map\ f\ ys)$
b) $map\ f\ (rev\ xs) = rev\ (map\ f\ xs)$