11. Übungsblatt zu
Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 2013/14

Prof. Dr. Gert Smolka, Jonas Kaiser, M.Sc.
www.ps.uni-saarland.de/courses/ti-ws13/

Lesen Sie im Buch: Supplementary Lecture E, Lecture 27 – 29

Anmerkung zur Notation: Wir haben in den letzten Wochen das Turnstile-Symbol ($\vdash$) für recht viele verschiedene Dinge verwendet. Da dies großes Potential für Verwirrungen bietet, haben wir uns entschlossen, bei Kellerautomaten den Doppelpfeil ($\Longrightarrow$) für die Angabe der einzelnen Reduktionen zu verwenden, und den einfachen Pfeil ($\longrightarrow$) für den Übergang von einer Konfiguration in die nächste.

Kontextfreie Sprachen

Aufgabe 11.1 Sei folgende Grammatik gegeben:

$$S \longrightarrow x \mid S + S \mid S * S \mid (S) \mid \textbf{if } S \textbf{ then } S \textbf{ else } S,$$

wobei wir folgende Präzedenz-Ordnung für die Operatoren festlegen: $* > + >$ **if.** Alle Binäroperatoren sind rechts-assoziativ. Geben Sie die Reduktionsregeln eines entsprechenden Shift-Reduce-Parsers an.

Aufgabe 11.2 Sei $C \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache und $R \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass $C \cap R$ kontextfrei ist.

Aufgabe 11.3 Wir haben verschiedene Versionen der Kellerautomaten, mit und ohne Zustände, sowie mit verschiedenen Akzeptanzbedingungen (Endzustand erreicht, bzw. Keller geleert) kennengelernt und festgestellt, dass jede Variante die Klasse der kontextfreien Sprachen erkennen kann. Diese Beobachtung beruht auf einer Reihe von Übersetzungen zwischen den Varianten, die wir hier genauer betrachten.

(a) Sei M ein PDA_Q^Z, d.h. ein Kellerautomat mit Zuständen, welcher Endzustände als Akzeptanzbedingung verwendet. Geben Sie einen PDA_Q^K M' an, welcher $\mathcal{L}(M)$ erkennt und mithilfe eines leeren Kellers akzeptiert.

(b) Sei M eine PDA_Q^K. Geben Sie einen PDA_Q^Z für $\mathcal{L}(M)$ an.

Aufgabe 11.4

(a) Sei folgender PDA_Q^K gegeben:

$$Q = \{s, t\} \qquad \Gamma = \{\bot, T, C, D\} \qquad \Sigma = \{a, b, c, d\}$$

$$\begin{aligned} s, a, \bot &\Rightarrow t, T\,D \\ s, a, \bot &\Rightarrow s, \bot D \\ t, b, T &\Rightarrow t, C \\ t, b, T &\Rightarrow t, T\,C \\ t, c, C &\Rightarrow t, \epsilon \\ t, d, D &\Rightarrow t, \epsilon \end{aligned}$$

Geben Sie einen äquivalenten PDA_Q^Z an.

(b) Sei folgender PDA_Q^Z gegeben:

$$Q = \{s, p, q\} \qquad F = \{p, q\} \qquad \Gamma = \{\bot\} \qquad \Sigma = \{a, b\}$$

$$\begin{aligned} s, a, \bot &\Rightarrow s, \bot\bot \\ s, b, \bot &\Rightarrow s, \bot\bot \\ s, a, \bot &\Rightarrow p, \bot \\ p, a, \bot &\Rightarrow q, \epsilon \\ q, b, \bot &\Rightarrow q, \epsilon \end{aligned}$$

Geben Sie einen äquivalenten PDA_Q^K an.

(c) Sei folgender PDA_Q^K gegeben:

$$Q = \{s, q\} \qquad \Gamma = \{\bot, T\} \qquad \Sigma = \{a, b\}$$

$$\begin{aligned} s, a, \bot &\Rightarrow q, \bot T \\ q, b, \bot &\Rightarrow s, \bot T \\ s, b, \bot &\Rightarrow s, \epsilon \\ q, a, \bot &\Rightarrow q, \epsilon \\ s, \epsilon, T &\Rightarrow q, \epsilon \\ q, \epsilon, T &\Rightarrow s, \epsilon \end{aligned}$$

Geben Sie einen äquivalenten PDA, d.h. einen Kellerautomat ohne Zustände, an.

Aufgabe 11.5 Sei folgende Grammatik gegeben:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AS \mid BS \mid AR \mid BT \mid c \\ R &\longrightarrow BS \\ T &\longrightarrow AS \\ A &\longrightarrow a \\ B &\longrightarrow b \end{aligned}$$

Wenden Sie den CKY-Algorithmus mithilfe einer Dreieckstabelle auf das Eingabewort *abac* an.

Diagonalisierungsbeweise

Aufgabe 11.6 Formulieren und beweisen Sie den *Cantorschen Satz*.

Aufgabe 11.7 Sei $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Seien eine Menge X und eine Funktion $p : X \to X \to \mathbb{B}$ gegeben. Beweisen Sie:

$$\neg\exists x, \forall y, p\ x\ y \iff \neg p\ y\ y.$$

Aufgabe 11.8 Beweisen Sie folgende Aussage: Es gibt keine Surjektion $\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{B})$.

Turing Maschinen

Zur Erinnerung hier noch einmal die wichtigsten Konzepte unserer Formalisierung von Turing Maschinen (TM).

Sei ein Eingabealphabet Σ und ein Bandalphabet Γ gegeben, für die gilt $\Sigma \subset \Gamma$, sowie $\vdash, \llcorner\!\lrcorner \in \Gamma - \Sigma$. Die Maschine besitzt ein Band endlicher Länge sowie eine Menge von Zuständen Q, welche mindestens den Startzustand s sowie die Endzustände t für Akzeptanz und r für Ablehnung enthält. Wir nehmen an, dass Γ und Q disjunkt sind.

Ferner gibt es eine *partielle*, *deterministische* Transitionsfunktion

$$\delta : (Q - \{t, r\}) \times \Gamma \rightharpoonup Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

Die Transitionsfunktion darf den Lesekopf nicht über das linke Ende des Bandes (markiert mit $\vdash$) hinaus bewegen. Wenn eine Transition rechts das Bandende überschreitet, wir eine neue leere Zelle alloziert (markiert mit $\llcorner\!\lrcorner$).

Ein Lauf der Maschine ist eine Folge von Konfigurationen $\gamma \in \Gamma^* Q \Gamma^+$, wobei der Lesekopf immer auf das Zeichen direkt rechts neben dem Zustand zeigt. Die initiale Konfiguration für das Eingabewort x ist $s{\vdash}x$ die initiale. Wenn keine Transition mehr anwendbar ist, *hält*, bzw. *terminiert*, die Maschine. Ein Lauf kann zu vier möglichen Szenarien führen:

1. Die Maschine terminiert mit einer Konfiguration der Form ytz; man sagt dann, dass die Maschine das Eingabewort **akzeptiert.**
2. Die Maschine terminiert mit einer Konfiguration der Form yrz; man sagt dann, dass die Maschine das Eingabewort **ablehnt** oder verwirft.
3. Die Maschine terminiert mit einer Konfiguration der Form yqz, mit $q \notin \{r, t\}$; man sagt dann, dass die Maschine **hängt**, also ein Fehler aufgetreten ist.
4. Die Maschine **divergiert**.

Man spricht von einer *totalen* TM (bei gegebenem Σ), wenn die Maschine jedes Wort $x \in \Sigma^*$ entweder akzeptiert oder ablehnt, d.h. sie darf werder divergieren noch hängen bleiben.

Aufgabe 11.9 Sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ wie folgt gegeben. Definieren Sie jeweils eine totale TM, die L erkennt. Geben Sie hierzu die Mengen Γ und Q, sowie die Transitionen an.

(a) $L = \mathcal{L}(a^*)$
(b) $L = \mathcal{L}(a^* b^*)$

Aufgabe 11.10 Sei ein DFA M gegeben. Konstruieren Sie eine totale TM für $\mathcal{L}(M)$.

Aufgabe 11.11 Konstruieren Sie eine totale TM für $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.