# 13. Übungsblatt zu
# Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 2013/14

Prof. Dr. Gert Smolka, Jonas Kaiser, M.Sc.

`www.ps.uni-saarland.de/courses/ti-ws13/`

---

Lesen Sie im Buch: Lectures 34, 35, 38, 39, sowie Schöning: Kapitel 3

---

Wir arbeiten mit einem Programmiersystem $(\Sigma, \pi', [\,])$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\Sigma$ ist ein endliches Alphabet mit mindestens einem Zeichen.
2. $\pi' \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \times \mathbb{N}$ ist eine *schrittindizierte* Akzeptanzrelation. Wir schreiben $\pi'\, x\, y\, n$ für $(x, y, n) \in \pi'$ und sagen „$x$ akzeptiert $y$ in (höchstens) $n$ Schritten".
3. $\pi'$ ist monoton in der Schrittzahl: $\forall xymn. \pi'\, x\, y\, m \to n \geq m \to \pi'\, x\, y\, n$
4. Sei $\pi\, x\, y := \exists n. \pi'\, x\, y\, n$.
5. $[\,] : Exp \to \Sigma^*$ ist eine Übersetzungsfunktion, wobei
   a) $Exp$ die folgende Menge von Ausdrücken ist:

$$s, t, t_1, t_2 ::= x \mid \alpha \mid T \mid R \mid s@t \mid \lambda\alpha.s \mid s;t \mid s \parallel t \mid \mathbf{if}\, x\, s\, t \mid \sigma\, s\, t_1\, t_2 \qquad (x \in \Sigma^*)$$

   b) folgende semantische Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
[x] &= x & \pi\,[\lambda\alpha.s]\,y &\equiv \pi\,[s^\alpha_y]\,\epsilon \\
\pi\,[\alpha]\,y &\equiv \mathbf{false} & \pi\,[s;t]\,y &\equiv \pi\,[s]\,y \wedge \pi\,[t]\,y \\
\pi\,[T]\,y &\equiv \mathbf{true} & \pi\,[s \parallel t]\,y &\equiv \pi\,[s]\,y \vee \pi\,[t]\,y \\
\pi\,[R]\,y &\equiv \mathbf{false} & \pi\,[\mathbf{if}\, x\, s\, t]\,y &\equiv (x = y \wedge \pi\,[s]\,y) \vee (x \neq y \wedge \pi\,[t]\,y) \\
\pi\,[s@t]\,y &\equiv \pi\,[s]\,[t] & \pi\,[\sigma\, s\, t_1\, t_2]\,y &\equiv (\pi'\,[s]\,\epsilon\,|y| \wedge \pi\,[t_1]\,\epsilon) \vee \\
& & & \phantom{\equiv} (\neg\pi'\,[s]\,\epsilon\,|y| \wedge \pi\,[t_2]\,\epsilon)
\end{aligned}$$

Wir definieren die von $x$ akzeptierte Sprache wie folgt:

$$\mathcal{L}(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in \Sigma^* \mid \pi\, x\, y\}$$

Für $A \subseteq \Sigma^*$ definieren wir:

$$\begin{aligned}
x \text{ akzeptiert } A &\overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{L}(x) = A \\
A \text{ ist akzeptierbar} &\overset{\text{def}}{\iff} \exists x \in \Sigma^*. \mathcal{L}(x) = A \\
A \text{ ist entscheidbar} &\overset{\text{def}}{\iff} A \text{ ist akzeptierbar } \wedge \overline{A} \text{ ist akzeptierbar}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 13.1** Lesen Sie die Musterlösung zu Blatt 12.

**Aufgabe 13.2** Seien $A, B \subset \Sigma^*$ akzeptierbare Sprachen.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ nicht notwendigerweise akzeptierbar ist.
(b) Zeigen Sie, dass $A \cap B$ akzeptierbar ist.
(c) Zeigen Sie, dass $A \cup B$ akzeptierbar ist.

**Aufgabe 13.3** Seien $A, B \subset \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen.

a) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ entscheidbar ist.
b) Zeigen Sie, dass $A \cap B$ entscheidbar ist.
c) Zeigen Sie, dass $A \cup B$ entscheidbar ist.

**Aufgabe 13.4** Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *wüst*, wenn weder $A$ noch $\overline{A}$ akzeptierbar ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen wüst sind:

(a) $\{x \in \Sigma^* \mid \mathcal{L}(x) \neq \Sigma^*\}$
(b) $\{x \in \Sigma^* \mid \mathcal{L}(x) = \{\epsilon\}\}$

**Aufgabe 13.5** Für diese Aufgabe ergänzen wir unser Programmiersystem mit zwei neuen Ausdrucksformen:

$$s, t, t_1, t_2 \coloneqq \ldots \mid \mathbf{eq}\, x \mid \mathbf{neq}\, x$$

Geben Sie jeweils eine semantische Bedingung an, sodass

$$\mathcal{L}([\mathbf{if}\, x\, s\, t]) = \mathcal{L}([\mathbf{eq}\, x; s \parallel \mathbf{neq}\, x; t])$$

gilt.

**Aufgabe 13.6** Beweisen Sie den Satz von Rice.

**Aufgabe 13.7** Definieren Sie Hilberts 10. Problem.

**Aufgabe 13.8** Geben Sie 4 unentscheidbare Probleme für kontextfreie Grammatiken an.

**Aufgabe 13.9** Sei $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$.

(a) Definieren Sie „$A$ ist auf $B$ reduzierbar“.
(b) Sei $A$ auf $B$ reduzierbar. Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Akzeptierbarkeit, beziehungsweise der Nichtakzeptierbarkeit, von $A$ und $B$ an.

**Aufgabe 13.10** Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Definieren Sie mit Prozeduren:

(a) $A$ akzeptierbar
(b) $A$ entscheidbar
(c) $A$ P-entscheidbar
(d) $A$ NP-entscheidbar

**Aufgabe 13.11** Definieren Sie SAT (wählen Sie eine geeignete Variante).