5. Übungsblatt zu
Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 2013/14

Prof. Dr. Gert Smolka, Jonas Kaiser, M.Sc.
www.ps.uni-saarland.de/courses/ti-ws13/

Lesen Sie im Buch: Lecture 11 – Lecture 14

Homomorphismen

Aufgabe 5.1 Geben Sie den *Bildsatz* und den *Urbildsatz* für Homomorphismen an.

Aufgabe 5.2 Beweisen Sie den *Urbildsatz*.

Aufgabe 5.3 Die Sprache $A = \{a^n b^n \in \{a,b\}^* \mid 0 \leq n\}$ ist das kanonische Beispiel für eine nicht reguläre Sprache. Weiterhin sollte es einleuchten, dass $B = \{x \in \{a\}^* \mid |x| \text{ ist gerade}\}$ regulär ist (Stellen Sie sicher, dass Ihnen die Argumentation hier klar ist). Betrachten Sie den Homomorphismus $h : \{a,b\} \to \{a\}^*$, $h(a) = h(b) = a$. Es gilt $h(A) = B$. Machen Sie sich klar warum diese Situation nicht im Widerspruch zu den Abschluss-Sätzen aus Aufgabe 5.1 steht. **Tip:** Geben Sie $h^{-1}(B)$ an.

Aufgabe 5.4 Sei ein Homomorphismus $h : \{0,1,2\} \to \{a,b\}^*$ wie folgt definiert: $h(0) = a$, $h(1) = ab$ und $h(2) = ba$.

(a) Geben Sie $h(21120)$ an.
(b) Sei $A = \mathcal{L}(0 + 12)$. Geben Sie $h(A)$ an.
(c) Geben Sie $h^{-1}(\{ababa\})$.
(d) Sei $A = \mathcal{L}(a(ba)^*)$. Geben Sie $h^{-1}(A)$ an.

Pumping Lemma

Aufgabe 5.5

(a) Geben Sie die Schöning- und die Kozen-Definition des Pumping Lemmas an.
(b) Geben Sie die Kontrapositionen der beiden Lemmas an.
(c) Erklären Sie welche Relevanz und Funktion das Pumping Lemma und seine Kontraposition im Kontext regulärer Sprachen haben.

Aufgabe 5.6 Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass folgende Sprachen nicht regulär sind.

(a) $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(b) $\{a^n b^m \mid n = 2m\}$
(c) $\{a^{n!} \mid 0 \leq n\}$
(d) $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
(e) $\{w \in \{(,)\}^* \mid w \text{ ist korrekt geklammert}\}$ Beispiel: „(()())()“ ist ok, „())“ ist nicht ok.
(f) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$[1]

[1] **Palindrome** sind Zeichfolgen die invariant unter Reversion sind.

Aufgabe 5.7 Betrachten Sie folgende Sprachen und entscheiden Sie jeweils ob die Sprache regulär ist oder nicht. Rechtfertigen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $\{a^n b^{2m} \mid n > 0, m > 0\}$
b) $\{xcx \mid x \in \{a,b\}^*\}$
c) $\{xcy \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$
d) $\{w \in \{a,b\}^* \mid \#a(w) \times \#b(w) \text{ ist gerade}\}$
e) $\{w \in \{a,b\}^* \mid \#a(w) = 2 * \#b(w)\}$
f) Erinnern Sie sich an die **rev** Operation auf Sprachen vom 2. Übungsblatt. Entscheiden Sie die Regularität von $\mathbf{rev}(A)$ unter der Annahme das A eine nicht-reguläre Sprache ist.
g) (*zum Knobeln*) Betrachten Sie folgende Konstruktion auf Sprachen

$$\text{FirstHalves}(L) \coloneqq \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, |x| = |y| \wedge xy \in L\}$$

Entscheiden Sie die Regularität von $\text{FirstHalves}(A)$ unter der Annahme das A eine reguläre Sprache ist.

Aufgabe 5.8 Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind, indem Sie ihre Regularität auf die Regularität von $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zurückführen. Nutzen Sie hierfür die Ihnen bekannten Abschluss-Eigenschaften regulärer Sprachen.

(a) $\{x \in \{a,b\}^* \mid \#a(x) = \#b(x)\}$
(b) $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$
(c) $\{a^n b^m c^{n-m} \mid 0 \leq m \leq n\}$

Kleene Algebra

Aufgabe 5.9 Beweisen Sie die folgenden Gleichungen mithilfe der Axiome für Kleene Algebren (Axiome 1 – 15 in Kozen, Seiten 55 – 57).

(a) $a^*a = aa^*$
(b) $a(ba)^* = (ab)^*a$
(c) $(a^*b)^*a^* = (a+b)^*$