



## 6. Übungsblatt zu Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 2013/14

Prof. Dr. Gert Smolka, Jonas Kaiser, M.Sc.  
www.ps.uni-saarland.de/courses/ti-ws13/

---

Lesen Sie im Buch: Lecture 13 - Lecture 14

---

### Partitionen & Äquivalenz Relationen

#### Aufgabe 6.1

- (a) Welche drei Eigenschaften charakterisieren eine Partition?
- (b) Geben Sie für jede Eigenschaft die formale Definition an.

**Aufgabe 6.2** Entscheiden Sie im folgenden jeweils, ob  $P$  eine Partition von  $X$  ist.

- (a)  $X = \{a, b, c, d\}$ 
  - $P = \{a, b, c, d\}$
  - $P = \{\{a, b, c, d\}\}$
  - $P = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
  - $P = \{a, \{b, c\}, d\}$
  - $P = \{\emptyset, \{b, c\}, \{a, c, d\}\}$
- (b)  $X = \mathcal{L}(a^*)$ 
  - $P = \{\{a^n \mid n \text{ ist gerade}\}, \{a^n \mid n \text{ ist ungerade}\}\}$
  - $P = \{\{a^p\} \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

**Aufgabe 6.3** Geben Sie eine Partition  $P$  von  $\mathbb{N}$  mit  $n > 0$  Äquivalenzklassen an, wobei jede Klasse  $K \in P$  die gleiche Kardinalität haben soll.

**Aufgabe 6.4** In welchem Bezug stehen Partitionen und Äquivalenzrelationen? Rechtfertigen Sie Ihre Antwort formal.

### Minimierung von DFAs

**Aufgabe 6.5** Sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  ein DFA. Wir definieren die Sprache eines Zustandes und eine Äquivalenzrelation auf Zuständen wie folgt:<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) \in F\}$$
$$p \approx q \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(p) = \mathcal{L}(q).$$

- (a) Zeigen Sie

$$p \approx q \implies \forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \approx \delta(q, a).$$

- (b) Geben Sie die Definition der Quotienten-Konstruktion auf  $M$  an.
- (c) Das Ergebnis aus (a) garantiert, dass die Definition aus (b) wohlgeformt ist. Warum?

---

<sup>1</sup>Unsere Definition von Zustandsäquivalenz ist äquivalent zu Kozens Definition. Siehe Teil (d) der Aufgabe.

(d) Zeigen Sie

$$\mathcal{L}(p) \subseteq \mathcal{L}(q) \iff \forall x \in \Sigma^*, \hat{\delta}(p, x) \in F \implies \hat{\delta}(q, x) \in F.$$

Nehmen Sie an, dass  $\forall X, \{x \in X \mid P x\} \subseteq \{x \in X \mid Q x\} \iff \forall x \in X, P x \implies Q x$ .

(e) Sei  $[f]$  die  $\approx$ -Äquivalenzklasse von  $f$  und  $F'$  die Menge der Endzustände der Quotienten-Konstruktion auf  $M$ . Zeigen Sie

$$f \in F \iff [f] \in F'.$$

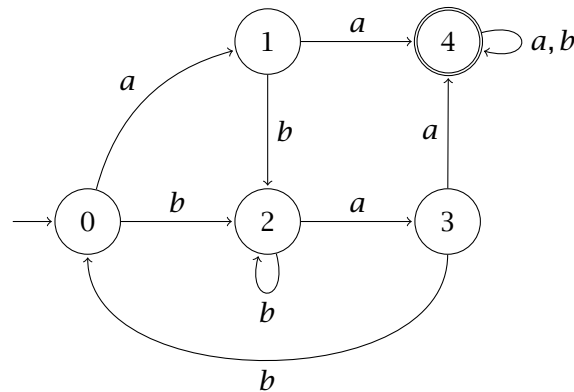
**Aufgabe 6.6** Geben Sie den Algorithmus zur Minimierung eines DFAs an.

**Aufgabe 6.7** Betrachten Sie die folgenden DFAs und geben Sie jeweils einen minimalen DFA als Diagramm an, welcher die gleiche Sprache erkennt. Nennen und entfernen Sie dafür zuerst die unerreichbaren Zustände, und listen Sie die  $\approx$ -Äquivalenzklassen.

$M_1$	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	1	4
2	3	1
3	F	4
4	F	3
5	4	6
6	6	3
7	2	4
8	3	1

$M_2$	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	F	3
2	F	8
3	7	2
4	6	2
5	1	8
6	2	3
7	1	4
8	5	1

**Aufgabe 6.8** Minimieren Sie den folgenden DFA und geben Sie dann einen Regulären Ausdruck an, welcher die erkannte Sprache beschreibt:



**Aufgabe 6.9** Beschreiben Sie den Algorithmus mit dem man einen regulären Ausdruck in einen äquivalenten, minimalen DFA konvertiert. Wenden Sie diesen auf die folgenden regulären Ausdrücke an.

- (a)  $(000)^*1 + (00)^*1$
- (b)  $10(11^*0)^*0$