Prof. Dr. Gert Smolka, Jonas Kaiser, M.Sc.

www.ps.uni-saarland.de/courses/ti-ws13/

Lesen Sie im Buch: Lecture 15 – Lecture 16

Aufgabe 7.1 Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DFA. Geben Sie den bereinigten DFA (BDFA) M' an, welcher keine unerreichbaren Zustände enthält. Argumentieren Sie, dass die erkannte Sprache sich nicht ändert.

Aufgabe 7.2 Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache und $\equiv$ eine Relation auf Σ^*. Welche Eigenschaften muss $\equiv$ erfüllen, damit es eine *Myhill-Nerode Relation* für A ist?

Aufgabe 7.3 Jedem BDFA lässt sich eine Myhill-Nerode Relation zuordnen. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache und $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein BDFA der A erkennt. Man definiert

$$x \equiv_M y \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \hat{\delta}(s, x) = \hat{\delta}(s, y)$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_M$ eine Myhill-Nerode Relation für A ist.

Aufgabe 7.4 Jeder Myhill-Nerode Relation für eine Sprache A lässt sich ein DFA zuordnen, welcher A erkennt. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ und $\equiv$ eine Myhill-Nerode Relation für A.

(a) Geben Sie die Definition des DFA $M_\equiv$ an.
(b) Zeigen Sie, dass Ihre Definition die folgenden Eigenschaften erfüllt:
- $x \in A \iff [x] \in F$
- $\hat{\delta}([x], y) = [xy]$
- $\mathcal{L}(M_\equiv) = A$

Aufgabe 7.5 Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Im Folgenden beschreiben wir Äquivalenzklassen mit Hilfe von regulären Ausdrücken beziehungsweise Mustern.

(a) Sei $A = \{aa\}$ eine Sprache. Geben Sie einen minimalen DFA M für A an. Wie oben beschrieben induziert M eine Myhill-Nerode Relation $\equiv_M$. Geben Sie zu jeder Äquivalenzklasse K von $\equiv_M$ ein Muster α an, so dass $\mathcal{L}(\alpha) = K$. Falls das Muster kein regulärer Ausdruck ist, geben Sie zusätzlich einen regulären Ausdruck an.
(b) Sei eine Myhill-Nerode Relation $\equiv$ für $\mathcal{L}(ab^*)$ durch die folgenden Äquivalenzklassen definiert:

$0 : [\epsilon]$	$1 : [ab^*]$
$2 : [ab^*aa^*]$	$3 : [(\epsilon + ab^*aa^*)b(a+b)^*]$

Geben Sie den durch $\equiv$ induzierten DFA $M_\equiv$ als Diagramm an. Geben Sie dann auch einen minimalen DFA an, welcher die gleiche Sprache erkennt.

Aufgabe 7.6 Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und die Relation $\equiv_A$ auf Σ^* wie folgt definiert:

$$x \equiv_A y \overset{\text{def}}{=} \forall z \in \Sigma^*, (xz \in A \iff yz \in A)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv_A$ eine Äquivalenzrelation ist.
(b) Formulieren und beweisen Sie, dass $\equiv_A$ eine Rechtskongruenz ist.
(c) Zeigen Sie, dass $\equiv_A$ verträglich ist mit A.
(d) Zeigen Sie, dass $\equiv_A$ die *gröbste* Relation ist, welche die Eigenschaften (b) und (c) erfüllt.
(e) Nennen und beweisen Sie das Myhill-Nerode Theorem.

Aufgabe 7.7 Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Myhill-Nerode Theorems, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a) $A = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(b) $A = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$
(c) $A = \{w(\mathbf{rev}\ w) \mid w \in \Sigma^*\}$

Hinweis: Geben Sie jeweils eine Familie von Äquivalenzklassen von $\equiv_A$ an und zeigen Sie, dass diese Familie nicht endlich ist. Es ist *nicht* notwendig, alle Äquivalenzklassen von $\equiv_A$ anzugeben, eine nicht endliche Teilmenge reicht aus um zu zeigen, dass jede mit A verträgliche Rechtskongruenz keinen endlichen Index haben kann und A deshalb nicht regulär ist.

Bonusfrage zur Wiederholung: Können Sie die Regularität der Menge aller Palindrome in Σ^* (siehe Blatt 5, Aufgabe 5.6.f) auf die Regularität der Sprache aus (c) reduzieren?

Aufgabe 7.8 Für $A \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die Fortsetzungssprache eines Wortes als

$$\mathcal{L}(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in \Sigma^* \mid xy \in A\}.$$

Zeigen Sie:

$$x \equiv_A y \iff \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y).$$