8. Übungsblatt zu
Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 2013/14

Prof. Dr. Gert Smolka, Jonas Kaiser, M.Sc.

www.ps.uni-saarland.de/courses/ti-ws13/

Lesen Sie im Buch: Lecture 17 – Lecture 19, sowie Lecture 21

Relationen

Im folgenden verwenden wir mehrfach die reflexiv-transitive Hülle einer binären Relation. Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine binäre Relation auf X. Wir definieren die *reflexiv-transitive Hülle* $R^* \subseteq X \times X$ induktiv mit den folgenden zwei Regeln:

$$\frac{}{R^*\ x\ x} \qquad\qquad \frac{R\ x\ y \qquad R^*\ y\ z}{R^*\ x\ z}$$

Wenn Sie sich (X, R) als gerichteten Graphen vorstellen, wobei X die Menge der Knoten und R die Menge der Kanten ist, dann entspricht R^* der *Erreichbarkeitsrelation* des Graphen.

Aufgabe 8.1 Sei $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und R durch folgende Tabelle gegeben:

R	0	1	2	3	4
0		✓			
1		✓			✓
2					✓
3					✓
4			✓		

a) Zeichnen Sie den Graphen (X, R).
b) Geben Sie R^* als Tabelle an.

Aufgabe 8.2 Sei die binäre Relation $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert als

$$S\ x\ y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad y = x + 1$$

Geben Sie eine möglichst kompakte Beschreibung von S^* an.

Aufgabe 8.3 Schrittcharakterisierung
Die Komposition zweier Relationen $R, S \subseteq X^2$ ist wie folgt definiert:

$$R \circ S \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \{(x, z) \mid \exists y \in X, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}.$$

Die Potenzen R^n sind rekursiv definiert:

$$R^0 \overset{\text{def}}{=} \{(x, x) \mid x \in X\}$$
$$R^{n+1} \overset{\text{def}}{=} R \circ R^n$$

Machen Sie sich klar, dass $R^n\ x\ y$ bedeutet, dass x den Knoten y in n Schritten erreichen kann. Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen:

a) $R^{n+1}\ x\ y \iff \exists x', R\ x\ x' \wedge R^n\ x'\ y$
b) $R \circ R^n = R^n \circ R$
c) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
d) $R^{n+1}\ x\ y \iff \exists x', R^n\ x\ x' \wedge R\ x'\ y$
e) $R^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$
f) $R^*\ x\ y \iff \exists n, R^n\ x\ y$, d.h. y ist von x aus erreichbar, genau dann wenn es in n Schritten erreichbar ist, für irgend ein n.
g) R^* ist transitive: $\forall x, y, z \in X, R^*\ x\ y \to R^*\ y\ z \to R^*\ x\ z$

Hinweis: Sie benötigen unter anderem eine Induktion über die Herleitung von $R^*\ x\ y$. Stellen Sie sicher, dass Sie für jeden Induktionsbeweis die Induktionsannahme angeben.

Zweiwegautomaten

Unsere Definition von Zweigautomaten (2DFAs) weicht in mehreren Punkten von derjenigen in Kozen ab. Der Hauptunterschied besteht darin, dass wir partielle Funktionen und Transitionsrelationen verwenden, welche es dem Automaten ermöglichen ordnungsgemäß zu halten oder hängen zu bleiben. Wir beziehen uns auf dem Übungsblatt, im Test und in der Klausur immer auf die hier gegebene Definition. Stellen Sie sicher, dass Sie diese verstanden haben.

Definition: Ein **2DFA** ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, s, t)$ mit folgenden Komponenten:

1. Q ist eine endliche Menge mit $s, t \in Q$.
2. Σ ist eine endliche Menge mit $\vdash, \dashv \notin \Sigma$.
3. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\vdash, \dashv\}) \rightharpoonup Q \times \{1, -1\}$ ist eine *partielle* Funktion.

Sei M gegeben. Die *Lesefunktion* $B : \Sigma^* \times \mathbb{N} \rightharpoonup \Sigma \times \{\vdash, \dashv\}$ ist wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
B\ x\ 0 &\overset{\text{def}}{=} \vdash, \\
B\ x\ i &\overset{\text{def}}{=} a_i && \text{falls } x = a_1 \ldots a_i \ldots a_n, \\
B\ x\ (|x|+1) &\overset{\text{def}}{=} \dashv .
\end{aligned}
$$

Sei $x \in \Sigma^*$ gegeben. Wir definieren

$$Pos_x \overset{\text{def}}{=} \{0, \ldots, |x|+1\}.$$

Die *Transitionsrelation* $\underset{x}{\longrightarrow} \subseteq (Q \times Pos_x)^2$ ist wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
(p, i) \underset{x}{\longrightarrow} (q, j) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad & \delta(p, B\ x\ i) = (q, \sigma) \wedge \\
& j = \textbf{if } i + \sigma \in Pos_x \textbf{ then } i + \sigma \textbf{ else } i.
\end{aligned}
$$

Die *Sprache von M* is wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}(M) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \Sigma^* \mid (s, 1) \underset{x}{\longrightarrow}^* (t, |x|+1)\}.$$

Die Transitionsrelation $\xrightarrow[x]{\cdot} \subseteq \xrightarrow[x]{}$ ist wie folgt definiert:

$$(p,i) \xrightarrow[x]{\cdot} (q,j) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad (p,i) \xrightarrow[x]{} (q,j) \wedge i \leq |x|$$

Die Tabelle $T_x \subseteq (Q \uplus \{\bullet\}) \times Q$ ist wie folgt definiert:

$$T_x \overset{\text{def}}{=} \{(\bullet, p) \mid (s,1) \xrightarrow[x]{\cdot}{}^{*} (p, |x|+1)\} \cup \{(q,p) \mid (q,|x|) \xrightarrow[x]{\cdot}{}^{*} (p, |x|+1)\}$$

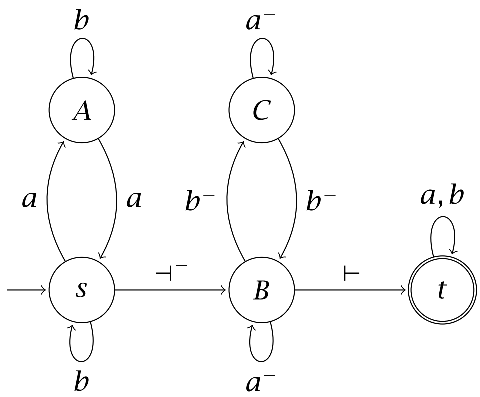
Aufgabe 8.4 Sei $A \subseteq \{a,b\}^*$ die Menge aller Wörter x, in denen die Anzahl der Auftreten von ab gerade ist und $(\#b(x) \bmod 3 = 2)$ gilt.

(a) Geben Sie einen 2DFA für A als Diagramm an.
(b) Geben Sie die Folge der Konfiguration an, welche Ihr Automat beim Erkennen des Wortes *bbaabbab* durchläuft.
(c) In welcher Konfiguration bleibt Ihr Automat bei dem Versuch, *abababab* zu erkennen, hängen?

Aufgabe 8.5 Sei folgender 2DFA für die Sprache

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#a(x) \text{ ist gerade} \wedge \#b(x) \text{ ist gerade}\}$$

gegeben.



Markieren Sie in der folgenden Tabelle alle Paare in T_x für

(a) $x = \epsilon$
(b) $x = abba$

T_x	s	A	B	C	t
s					
A					
B					
C					
t					
$\bullet$					

Kontextfreie Grammatiken (CFGs)

Aufgabe 8.6 Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

a) Geben Sie die Definition der Ableitungsrelation $\underset{G}{\longrightarrow} \subseteq ((N \cup \Sigma)^*)^2$ an.
b) Geben Sie die Definition der Sprache $\mathcal{L}(G)$ an.
c) Erklären Sie, was eine *Satzform* und was ein *Satz* von G ist.

Aufgabe 8.7 Die abstrakte Syntax von regulären Ausdrücken mit Zeichen $a \in \Gamma$ ist definiert als

$$\alpha, \beta \stackrel{\text{def}}{=} a \mid \epsilon \mid \emptyset \mid \alpha\beta \mid \alpha + \beta \mid \alpha^*$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für konkrete reguläre Ausdrücke über $\Gamma = \{0, 1\}$ an, welche Klammerung sowie die üblichen Operator-Präzedenzen berücksichtigt.

Aufgabe 8.8 Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DFA und G die folgende kontextfreie Grammatik.

$$G \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, P, s)$$

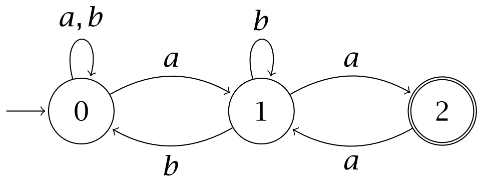
$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{p \mapsto aq \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{p \mapsto \epsilon \mid p \in F\}$$

Zeigen Sie:

a) $\forall x \in \Sigma, p \in Q, p \underset{G}{\longrightarrow}^* x \implies \hat{\delta}(p, x) \in F$
b) $\forall x \in \Sigma, p \in Q, p \underset{G}{\longrightarrow}^* x \impliedby \hat{\delta}(p, x) \in F$
c) $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$

Aufgabe 8.9 Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen eine bereinigte, kontextfreie Grammatik an.

a) $A = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ ist Palindrom } \wedge |x| \text{ ist ungerade}\}$
b) $B = \mathcal{L}(ab(a + b)^* b(ab + ba)^*)$
c) Die Sprache des Automaten



d) $D = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#0(x) = \#1(x)\} - \{\epsilon\}$