



9. Übungsblatt zu Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 2013/14

Prof. Dr. Gert Smolka, Jonas Kaiser, M.Sc.
www.ps.uni-saarland.de/courses/ti-ws13/

Lesen Sie im Buch: Lecture 20, sowie Lecture 22 - Lecture 25

Wir wünschen allen Teilnehmern des Kurses ein geruhsames Weihnachtsfest und einen guten Start ins neue Jahr.

Aufgabe 9.1 Geben Sie eine eindeutige, kontextfreie Grammatik für arithmetische Ausdrücke über das Alphabet $\Sigma = \{0, 1, (,), +, -, *, ^, \sim\}$ an. Die Grammatik soll, zu Übungszwecken, folgende Eigenschaften aufweisen.

- Präzedenzordnung der binären Operatoren: $\wedge > * > +, -$, d.h. der Potenzoperator bindet am stärksten und Addition am schwächsten.
- Die unäre Negation \sim darf beliebig häufig, aber nur vor atomaren Ausdrücken, auftreten.
- Der Potenzoperator und Subtraktion klammern nach links.
- Addition klammert nach rechts.
- Multiplikation klammert weder nach rechts noch nach links.

Aufgabe 9.2 Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und \bar{x} das boolesche, zeichenweise Komplement von x . Sei die Sprache L gegeben als

$$L = \{x \mid \text{rev } x = \bar{x}\}$$

Die Sprache L enthält beispielsweise die Wörter 011001 und 010101.

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für L an.
- Geben Sie eine Grammatik in Chomsky-Normalform für $L - \{\epsilon\}$ an.

Aufgabe 9.3 Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Sei $A \in N$ eine Kategorie. Geben Sie die Definition der Sprache $\mathcal{L}(A)$ an.
- Geben Sie die Definition der Sprache $\mathcal{L}(G)$ mithilfe Ihrer Lösung aus Teil (a) an.
- Geben Sie die Definition der Linksableitungsrelation \xrightarrow{L}_G an.

Aufgabe 9.4 Wir betrachten die Ableitungsrelationen \xrightarrow{L}_G und \xrightarrow{G} . Gelten folgende Eigenschaften? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

- $\xrightarrow{L}_G \subseteq \xrightarrow{G}$
- $\alpha \xrightarrow{G} \beta \Rightarrow \alpha \xrightarrow{L}_G \beta$
- $\alpha \xrightarrow{G}^* \beta \Rightarrow \alpha \xrightarrow{L}_G^* \beta$
- $\alpha \xrightarrow{G} x \Rightarrow \alpha \xrightarrow{L}_G x$
- $\alpha \xrightarrow{G}^* x \Rightarrow \alpha \xrightarrow{L}_G^* x$

Aufgabe 9.5 Wir betrachten den Abschluss kontextfreier Sprachen unter bestimmten Operationen. Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort jeweils sorgfältig. Nehmen Sie an, dass die Sprache $N = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ *nicht* kontextfrei ist.

- Sind CFLs unter Vereinigung abgeschlossen?
- Sind CFLs unter Schnitt abgeschlossen?
- Sind CFLs unter Komplementierung abgeschlossen?

Aufgabe 9.6 Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $L = \mathcal{L}(G)$ die zugehörige Sprache. Zeigen Sie, dass kontextfreie Sprachen unter dem Kleene-Stern abgeschlossen sind. Geben Sie dazu eine Grammatik G' an mit $\mathcal{L}(G') = L^*$. Können Sie eine Lösung finden, die mit nur zwei zusätzlichen Produktionen auskommt?

Aufgabe 9.7 Sei $GA = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#a(x) = \#b(x)\}$ die Sprache aller Wörter mit gleicher Anzahl von as und bs .

- (a) Zeigen Sie $\mathcal{L}(G_1) = GA$, wobei G_1 die folgende Grammatik ist:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \epsilon \mid aB \mid bA \\ A &\rightarrow aS \mid bAA \\ B &\rightarrow bS \mid aBB \end{aligned}$$

- (b) Zeigen Sie $\mathcal{L}(G_2) = GA$, wobei G_2 die folgende Grammatik ist:

$$S \rightarrow \epsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$$

Aufgabe 9.8 Sei folgende Grammatik G gegeben:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \epsilon \mid CS \\ C &\rightarrow ABC \mid c \\ A &\rightarrow a \mid \epsilon \\ B &\rightarrow bb \end{aligned}$$

- Geben Sie die ersten 4 Schritte einer Linksableitung $S \xrightarrow[G]{L}^* bbc$ an.
- Geben Sie den Ableitungsbaum an, der den ersten 4 Schritten einer Linksableitung $S \xrightarrow[G]{L}^* bbc$ entspricht.
- Wiederholen Sie Teilaufgaben (a) und (b) für die ersten 10 Schritte einer Linksableitung $S \xrightarrow[G]{L}^* abbcbbbb$.

Aufgabe 9.9 Sei folgende Grammatik G gegeben:

$$S \rightarrow \epsilon \mid aS \mid aaS$$

- Geben Sie alle Linksableitungen und entsprechende Ableitungsbäume für $S \xrightarrow[G]{L}^* aaaa$ an.
- Geben Sie eine eindeutige Grammatik G' für die Sprache $\mathcal{L}(G)$ an.

Aufgabe 9.10 Geben Sie eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform für die Sprache $\{x \in \{a, b\}^* \mid \#a(x) = \#b(x) + 1\}$ an.

Aufgabe 9.11 Welche Sprache wird von der folgenden Grammatik erkannt (A ist die Startkategorie). Geben Sie eine möglichst kompakte Spezifikation an.

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB \mid bBA \\ B &\rightarrow aC \mid bA \\ C &\rightarrow \epsilon \mid aD \mid bB \\ D &\rightarrow bC \mid aDD \end{aligned}$$

Aufgabe 9.12 Sei folgende Grammatik gegeben:

$$S \rightarrow ab \mid ba \mid aSb \mid bSa \mid SS$$

Geben Sie eine äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform an.

Aufgabe 9.13 Geben Sie eine kontextfreie Grammatik und einen Kellerautomaten ohne Zustände für die Sprache $\{a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ an.

Aufgabe 9.14 Geben Sie möglichst einfache Kellerautomaten ohne Zustände für die folgenden Sprachen an.

- (a) $N = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $KK = \{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ ist korrekt geklammert}\}$

Aufgabe 9.15 Sei folgender Kellerautomat ohne Zustände gegeben:

$$\begin{array}{ll} \Sigma = \{a, b\} & \epsilon, \perp \vdash \epsilon \\ \Gamma = \{\perp, a\} & a, \perp \vdash a \\ & a, a \vdash aa \\ & b, a \vdash \epsilon \end{array}$$

- (a) Erkennt der Automat das Wort $abab$? Geben Sie die Folge der Konfigurationen des Automaten für dieses Wort an.
- (b) Konvertieren Sie den Automaten in eine äquivalente Grammatik.
- (c) Welche Sprache erkennt der Automat? Geben Sie Ihre Lösung mithilfe der Sprache KK an.