Die Transformation von Tate–Auflösungen unter Veronese–Einbettungen

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades eines Diplom–Mathematikers
der Naturwissenschaftlich–Technischen Fakultät I
Mathematik und Informatik
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von
Matthias Horbach

Saarbrücken, 2005

Angefertigt nach einem Thema von
Herrn Prof. Dr. Wolfram Decker
FR 6.1 Mathematik

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbst erstellt und dazu keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seit den Arbeiten von Serre [17] und Grothendieck [12] in der Mitte des 20. Jahrhunderts ist die Garbentheorie in vielen Bereichen der Mathematik, und nicht zuletzt in der algebraischen Geometrie, zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden, um systematisch eine Übersicht über lokale Daten in topologischen Räumen zu gewinnen. Tatsächlich formen viele elementare Gebilde, wie etwa der Ring der regulären Funktionen auf einer Varietät, eine Garbe.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel zum Studium der Eigenschaften von Garben ist die Betrachtung ihrer Kohomologiegruppen. Schon die Definition dieser Gruppen kann auf vielen verschiedenen Wegen geschehen, und doch sind die meisten davon nicht für die praktische Berechnung der Kohomologiegruppen einer gegebenen Garbe geeignet, da sie zu abstrakt oder kompliziert sind, um effizient implementiert zu werden. Und doch wächst durch den zunehmenden Einsatz von Computeralgebrasystemen zur Lösung algebraischer Fragestellungen die Notwendigkeit, auch die konkrete Berechnung von Kohomologiegruppen mit vertretbarer Komplexität durchzuführen.

Einen Ansatz dazu bieten Tate–Auflösungen: Gegeben eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}(W)$ über einem Vektorraum W ist die Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ ein exakter Komplex

$$T^\bullet : \quad \cdots \to T^{i-1} \to T^i \to T^{i+1} \to \cdots$$

über der äußeren Algebra $E = \Lambda(W^*)$. Erstmals stellte Gel′fand 1984 [11] diese Auflösungen vor, die auf Ergebnissen von Bernšteĭn, Gel′fand und Gel′fand [2] aus dem Jahr 1978 aufbauen. Eisenbud, Fløystad und Schreyer [5] zeigten im Jahr 2003, dass für die Terme der Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ die Beziehung

$$T^i \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} E(j-i) \otimes \Lambda^{n+1} W \otimes \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j))$$

gilt, dass also insbesondere alle Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ in dieser Auflösung codiert sind.

Und auch in anderen Bereichen spielen Tate–Auflösungen inzwischen eine wichtige Rolle, etwa zur Berechnung von Beilinson–Monaden oder zur Entwicklung neuer Formeln für Resultanten in [5] und [7]. Jedoch wollen wir auf diese Fragestellungen nicht im Detail eingehen, sondern uns hier einem anderen Problem zuwenden: Denn auch wenn Tate–Auflösungen vergleichsweise effizient berechenbar sind, stellt sich die Frage, ob sie sich nicht in einigen Fällen aus schon gegebenen Auflösungen anderer Garben konstruieren lassen. Ist beispielsweise $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n$, $f\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ ein Morphismus und die Bildgarbe $f_*\mathcal{F}$ wieder kohärent, so erwarten wir, dass die Tate–Auflösungen von $\mathcal{F}$ und $f_*\mathcal{F}$ miteinander zusammenhängen.

In dieser Arbeit wollen wir uns einer speziellen Instanz dieses Problems zuwenden. Ist nämlich $\Bbbk$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X = \mathbb{P}^n$ der n-dimensionale projektive Raum über $\Bbbk$, so betrachten wir die Veronese–Einbettungen $v_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Wir zeigen, dass und wie sich für eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^n$ der lineare Teil der Tate–Auflösung von $(v_d)_*\mathcal{F}$ aus dem linearen Teil der Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ konstruieren lässt, geben einen Algorithmus für die konkrete Berechnung der Auflösung von $(v_d)_*\mathcal{F}$ an und stellen eine Vermutung über die allgemeine Gestalt der Differenziale dieser Auflösung auf.

Bevor wir mit der eigentlichen Untersuchung von Tate–Auflösungen beginnen können, müssen wir die benötigten Sprechweisen und Verfahren einführen. Im ersten Kapitel verschaffen wir uns einen Überblick über die grundlegenden Begriffe der kommutativen Algebra und der algebraischen Geometrie, soweit sie in der vorliegenden Arbeit benötigt werden. Außerdem erhalten wir einen kurzen Einblick in die Grundlagen von Young–Tableaus und Schur–Moduln und widmen uns schließlich ausführlicher den Veronese–Einbettungen und ihren Eigenschaften. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die meisten allgemeinen Sätze ohne Beweis zitiert.

In Kapitel 2 wird das grundlegende Objekt unserer Studien, die Tate–Auflösung einer Garbe, eingeführt und an einigen Beispielen erläutert. Dazu folgen wir der historischen Entwicklung, indem wir erst die Ideen von Bernšteĭn, Gel′fand und Gel′fand entwickeln und dann mit Hilfe der von Eisenbud, Fløystad und Schreyer gefundenen Darstellung von Tate–Auflösungen einige ihrer wichtigen Eigenschaften betrachten.

Schließlich werden wir in Kapitel 3 untersuchen, in welcher Beziehung die die Tate–Auflösung einer Garbe und die ihres Bildes unter einer Veronese–Einbettung zueinander stehen. Wir berechnen zunächst die Terme der Auflösung des Bildes, ermitteln danach die Gestalt der linearen Differenziale der Auflösung und behandeln dann den Fall beliebiger Differenziale.

Da die praktische Berechnung von Tate–Auflösungen eine wichtige Motivation dieser Arbeit ist, befinden sich im Anhang eine Implementierung der wichtigsten Algorithmen sowie einige Beispielrechnungen in dem Computeralgebra–System Macaulay2.

Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Dr. Wolfram Decker und Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer für die interessante und anspruchsvolle Themenstellung und ihre Betreuung. Außerdem möchte ich Alice Keller und Johannes Lengler für die anregenden Diskussionen danken, und Carolin Heyl, Ute Staemmler und meinem Vater dafür, dass sie sich schon vorab durch diese Arbeit gekämpft haben. Schließlich danke ich meiner Freundin Andrea Heyl, die mich durch die Höhen und Tiefen im Enstehungsprozeß dieser Arbeit begleitet und mir besonders in der letzten Phase viel Geduld entgegengebracht hat.

Hinweise zur Notation

- Ist X eine Menge, so sei $|X|$ ihre Mächtigkeit.
- Die Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$.
- In der ganzen Arbeit bezeichnet $\mathbb{k}$ einen beliebigen, algebraisch abgeschlossenen Körper.
- Unter einem Ring wollen wir immer einen Ring mit Einselement verstehen. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die vorkommenden Ringe nicht kommutativ sein müssen und es oft, etwa im Falle äußerer Algebren, auch nicht sein werden.

  Ein graduierter Ring R ist eine Summe $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$, so dass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ die Beziehung $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ gilt. Eine graduierte $\mathbb{k}$-Algebra ist ein graduierter Ring mit $R_0 = \mathbb{k}$. Zusätzlich setzen wir bei allen graduierten $\mathbb{k}$-Algebren voraus, dass sie endlich erzeugt sind.
- Ist $R = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$, so schreiben wir den homogenen Anteil vom Grad 0 der Lokalisierung von R in x_i als $R_{(x_i)}$.
- Sind $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und R ein Ring, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Mat}(m \times n, R)$ den Ring der $m \times n$-Matrizen über R.
- Wenn wir von Moduln über einem nicht kommutativen Ring sprechen, so meinen wir stets Rechtsmoduln.

  Ist M ein graduierter Modul, so bezeichnen wir die homogenen Anteile von M mit tiefgestellten Indizes. Abkürzend schreiben wir oft $M = \bigoplus_d M_d$ und meinen damit implizit, dass M_d der homogene Anteil von M vom Grad d ist. Wollen wir nur bestimmte homogene Anteile von M betrachten, etwa diejenigen vom Grad $\geq d_0$, so schreiben wir $M_{\geq d_0}$ für den Untermodul $\bigoplus_{d \geq d_0} M_d$ von M. Um die Graduierung zu verschieben, d.h. den Modul zu twisten, benutzen wir die Notation $M(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, wobei $M(i)_d = M_{i+d}$ gilt.
- Ist V ein $\mathbb{k}$-Vektorraum, so ist $\mathbb{P}(V) := (V \setminus \{0\})/(\mathbb{k} \setminus \{0\})$ der projektive Raum über V. Ist V $n+1$-dimensional, so schreiben wir $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(V)$ und notieren die Elemente in der Form $(p_0 : \ldots : p_n)$.
- Bei kanonischen, d.h. basisunabhängigen, Isomorphismen schreiben wir oft „=“statt „$\cong$“.
- Den *Dualraum* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ eines $\mathbb{k}$-Vektorraums V bezeichnen wir mit V^*.

Kapitel 1

Grundlagen

Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung in diejenigen Gebiete der Algebra, die für unsere späteren Betrachtungen wesentlich sind.

Zunächst wenden wir uns Grundzügen der multilinearen Algebra zu. Nach einigen allgemeinen Definitionen vertiefen wir die Betrachtung äußerer Algebren und derer Eigenschaften. Besonderes Augenmerk legen wir auf die Konstruktion adjungierter Abbildungen und die Selbstdualität äußerer Algebren.

Auch im Abschnitt über homologische Algebra definieren wir zunächst kurz die grundlegenden Sprechweisen. Dies sind vor allem die Begriffe des Komplexes, der Homologie und der Minimalität von Auflösungen. Zur Darstellung von Komplexen führen wir Betti-Diagramme ein. Es folgen kurze Abhandlungen zur Eindeutigkeit minimaler Auflösungen, zur Castelnuovo–Mumford–Regularität sowie dem linearen Anteil eines Komplexes. Letzterer entsteht im Falle minimaler Komplexe durch Nullsetzen nichtlinearer Komponenten der Differenziale.

Als weiteres Hilfsmittel benötigen wir einige wenige Grundlagen der Darstellungstheorie. Wir werden uns zunächst kurz mit Young–Tableaus befassen, d.h. im Wesentlichen mit Partitionen $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, natürlicher Zahlen, und mit deren Hilfe Schur–Moduln konstruieren, die eine Verallgemeinerung von symmetrischer und äußerer Algebra darstellen und, wie sich herausstellt, eine Zerlegung von Tensorprodukten der Form $M \otimes \ldots \otimes M$ in direkte Summanden erlaubt. Die Littlewood–Richardson–Regel und ein wichtiger Spezialfall, die Pieri–Formel, erlauben es schließlich, auch eine Zerlegung von Tensorprodukten von Schurmoduln zu berechnen.

Wenn wir später Tate–Auflösungen einführen, werden wir diese vor allem für eine bestimmte Klasse von Objekten betrachten: die kohärenten Garben. Wir werden dann auch sehen, dass die Tate–Auflösung einer Garbe eng mit deren Kohomologie zusammenhängt. Alle relevanten Aspekte dieses weiten Feldes zu beleuchten oder gar herzuleiten, wird uns nicht möglich sein. Allerdings werden wir Garben und bestimmte Abbildungen zwischen diesen einführen und auf die Beziehung zwischen kohärenten Garben und endlich erzeugten Moduln eingehen. Im Anschluss befassen wir uns mit der Kohomologie von Garben und damit, wann bestimmte Kohomologiegruppen verschwinden, und stellen den Begriff der lokalen Kohomologie einer Garbe vor.

Schließlich wenden wir uns den Veronese–Einbettungen zu. Diese bilden für festes $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ einen Punkt $a = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ auf den Punkt $((M_i(a_0, \ldots, a_n))_{0 \leq i \leq N}) \in \mathbb{P}^N$ ab, wobei $N = \binom{n+d}{d} - 1$ und $(M_i(x_0, \ldots, x_n))_{0 \leq i \leq N}$ eine feste Anordnung der Monome vom Grad d in den Variablen $x_0, \ldots, x_n$ ist.

Die einzelnen Abschnitte sind bis auf wenige Ausnahmen voneinander unabhängig und in sich abgeschlossen. Lediglich Tensor– und äußere Algebra werden hin und wieder benötigt, und die Definition und Analyse der Veronese–Einbettungen basiert auf den Vorbetrachtungen über Garben.

Wir verzichten in diesem Kapitel auf die Wiederholung der Definitionen von (freien, endlich erzeugten, ...) Moduln sowie der zugehörigen Theorie. Ebenso wenig betrachten wir projektive Räume und ihre Eigenschaften. Eine Einführung hierzu findet sich beispielsweise bei Gathmann [10] sowie in jedem Buch über algebraische Geometrie (etwa [4], [14]).

1.1 Multilineare Algebra

Im Kapitel über multilineare Algebra werden wir uns in aller Kürze mit der Tensoralgebra über einem Modul beschäftigen, uns aber sehr schnell auf zwei Quotientenalgebren, nämlich die symmetrische und die äußere Algebra konzentrieren. Dabei orientieren wir uns anfangs grob an Bourbaki [3]. Vor allem der äußeren Algebra gilt unser gesteigertes Interesse, da wir sie für unsere späteren Konstruktionen verwenden. Am Ende dieses Kapitels werden wir insbesondere zeigen, dass die äußere Algebra E über einem $\Bbbk$-Vektorraum als Modul isomorph zu $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk)$ ist.

Seien im Folgenden R ein beliebiger kommutativer Ring und M und N Moduln über R.

Definition 1.1.1. Ein R-Modul $M \otimes_R N$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\otimes_R : M \times N \to M \otimes_R N$ heißt *Tensorprodukt* von M und N, wenn folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:
Zu jedem R-Modul P und jeder bilinearen Abbildung $f\colon M \times N \to P$ existiert genau ein R-Modul–Homomorphismus $g\colon M \otimes_R N \to P$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\otimes_R"] \arrow[dr, "f"'] & & M \otimes_R N \arrow[dl, "g"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 1.1.2.

- Ein solches Tensorprodukt existiert. Seien nämlich F der von den Elementen von $M \times N$ erzeugte freie R-Modul und $U \subseteq F$ der von den Elementen der Form

$$\begin{array}{l}(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)\\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)\\ (\lambda m, n) - (m, \lambda n)\\ (\lambda m, n) - \lambda(m, n)\end{array}$$

  (mit $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ und $\lambda \in R$) erzeugte Untermodul. Dann ist der Quotientenmodul F/U ein Tensorprodukt von M und N.

- Aufgrund der Eindeutigkeitsbedingung seiner universellen Eigenschaft ist das Tensorprodukt eindeutig bis auf Isomorphie.

- Wenn aus dem Kontext eindeutig ersichtlich ist, über welchem Ring das Tensorprodukt gebildet wird, werden wir meistens $\otimes$ für $\otimes_R$ schreiben.

- Sind M, N und P drei R-Moduln, so gilt

  - *Kommutativität:* $M \otimes N \cong N \otimes M$
  - *Assoziativität:* $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$
  - *Distributivität:* $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

  und die Isomorphismen sind kanonisch.

Beispiel 1.1.3.

- Für jeden R-Modul M gilt $R \otimes_R M = M$.

- Das Tensorprodukt zweier freier R-Moduln vom Rang r bzw. s ist der freie R-Modul vom Rang $r \cdot s$.

- Im Falle nicht freier Moduln ist die Situation nicht so einfach. Beispielsweise ist für teilerfremde $m, n \in \mathbb{Z}$ das Tensorprodukt $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wegen

$$a \otimes b = (ma) \otimes (b/m) = 0 \otimes (b/m) = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

  schon der Nullmodul.

Tensorprodukte tauchen beim Studium von Moduln auf natürliche Weise auf, da sich für zwei Moduln M, N der Modul der Homomorphismen von M nach N als Tensorprodukt einfacherer Moduln ausdrücken lässt:

Satz 1.1.4. *Seien M, N zwei R-Moduln. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R N \ .$$

Beweis. Der Isomorphismus ist gegeben durch die basisunabhängige Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R N \to \mathrm{Hom}_R(M, N);\ \varphi \otimes_R n \mapsto (m \mapsto \varphi(m)n) \ .$$

□

Besonders interessant für unsere Bedürfnisse ist auch der folgende Satz, der eine weitere Verbindung zwischen Homomorphismen und Tensoren aufzeigt:

Satz 1.1.5. *Seien V, W zueinander duale, endlich erzeugte, freie R-Moduln und M, N zwei beliebige R-Moduln. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_R(M, N \otimes V) = \mathrm{Hom}_R(M \otimes W, N) \ .$$

Beweis. Sei $\{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Basis von W und $\{e_0, \ldots, e_n\}$ die dazu duale Basis von V. Die Abbildungen

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_R(M \otimes W, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes V); \alpha \mapsto (m \mapsto \sum_i \alpha(m \otimes x_i)) \otimes e_i$$

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes V) \to \mathrm{Hom}_R(M \otimes W, N); \beta \mapsto ((m \otimes x_i) \mapsto n_i) \ ,$$

mit $\beta(m) = \sum_i n_i \otimes e_i$, sind zueinander invers.

Um zu zeigen, dass der Isomorphismus kanonisch ist, charakterisieren wir ihn wie folgt: Seien $f\colon M \otimes W \to N$ und $g\colon M \to N \otimes V$ Homomorphismen und

$$i\colon R \to W \otimes V;\ 1 \to \sum_i x_i \otimes e_i \ .$$

Dann ist $\varphi(f) = g$ genau dann, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \otimes R = M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i\otimes id"'] & V \otimes N \\ M \otimes W \otimes V \arrow[ur, "f\otimes \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Abbildung $i\colon R \to W \otimes V$ ist basisunabhängig, also auch der Isomorphismus φ. □

Die gerade gezeigte Beziehung ist für uns im Weiteren von so großer Bedeutung, dass wir dafür eigene Bezeichnungen einführen.

Definition 1.1.6. Seien V, W zwei zueinander duale, endlich erzeugte, freie R-Moduln und M und N zwei beliebige R-Moduln. Ist φ der Isomorphismus aus obigem Beweis, und sind $f\colon M \otimes W \to N$ und $g\colon M \to V \otimes N$ Homomorphismen mit $\varphi(f) = g$, so heißt f *linksadjungiert* zu g; umgekehrt heißt g *rechtsadjungiert* zu f. Oft sagen wir abkürzend, dass f und g *adjungiert* sind.

Bemerkung und Definition 1.1.7. Sei M ein R-Modul. Sei weiter

$$M^{\otimes d} := \begin{cases} R & \text{für } d = 0 \\ M \otimes M^{\otimes(d-1)} & \text{für } d > 0 \ . \end{cases}$$

Die *Tensoralgebra* von M ist die graduierte, nichtkommutative Algebra

$$T_R(M) := \bigoplus_{d=0}^{\infty} M^{\otimes d} \ ,$$

deren inneres Produkt durch

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) \cdot (y_1 \otimes \ldots \otimes y_n) := x_1 \otimes \ldots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_n$$

definiert ist.

Seien $I \subseteq T_R(M)$ das von $\{x \otimes y - y \otimes x \,|\, x, y \in M\}$ und $J \subseteq T_R(M)$ das von $\{x \otimes x \,|\, x \in M\}$ erzeugte Ideal. Dann heißt

$$\operatorname{Sym}(M) := T_R(M)/I$$

die *symmetrische Algebra* und

$$\Lambda(M) := T_R(M)/J$$

die *äußere Algebra* von M.

Notation 1.1.8. Wir schreiben das innere Produkt von $\Lambda(M)$ als $x \wedge y$, dasjenige von $\operatorname{Sym}(M)$ als $x \cdot y$, unter Verwendung der üblichen Abkürzungen kommutativer Produkte wie Exponenten–Schreibweise. Ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von M, so verwenden wir zur Darstellung von Monomen in $\operatorname{Sym}(M)$, d.h. von Produkten der x_i, die Notation

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ ,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ist. Für solche *Multiindizes* setzen wir

$$|\alpha| \quad := \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \ .$$

Bemerkung 1.1.9.

- Da die Ideale I und J homogen sind, erhalten symmetrische und äußere Algebra durch die Graduierung der Tensoralgebra eine kanonische Graduierung. Für die homogenen Bestandteile schreiben wir $\mathrm{Sym}_d(M)$ bzw. $\Lambda^d(M)$.
  Es gilt $\mathrm{Sym}_0(M) = R = \Lambda^0(M)$ und $\mathrm{Sym}_1(M) = M = \Lambda^1(M)$, wir können also R und M als Untermoduln von $\mathrm{Sym}(M)$ und $\Lambda(M)$ auffassen.

- Sei F ein endlich erzeugter, freier R-Modul mit Basis $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Dann bildet für $d > 0$ die Menge
  $$\left\{x^\alpha \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1},\, |\alpha| = d\right\}$$
  eine Basis von $\mathrm{Sym}_d(F)$. Ist $R = \Bbbk$ ein Körper, so ist
  $$\mathrm{Sym}(F) \cong \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$$
  isomorph zum Polynomring über den Basiselementen von F.

- Sei F ein endlich erzeugter, freier R-Modul mit Basis $\{e_0, \ldots e_n\}$. Dann bildet für $d > 0$ die Menge
  $$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} \,|\, 0 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n\}$$
  eine Basis von $\Lambda^d(F)$.

- Symmetrische und äußere Algebra über einem R-Modul M genügen einer universellen Eigenschaft, die, ähnlich wie bei der Tensoralgebra, die Eindeutigkeit garantiert:

  Zu jedem R-Modul P und jeder R-linearen Abbildung $f\colon M \to P$ mit $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ für alle $x, y \in M$ existiert genau ein R-Algebra–Homomorphismus $g\colon \mathrm{Sym}(M) \to P$, so dass das Diagramm
  $$\begin{tikzcd} M \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Sym}(M) \arrow[dl, "g"] \\ & P & \end{tikzcd}$$
  kommutiert.

  Zu jedem R-Modul $\widetilde{P}$ und jeder R-linearen Abbildung $\widetilde{f}\colon M \to \widetilde{P}$ mit $\widetilde{f}(x)^2 = 0$ für alle $x \in M$ existiert genau ein R-Algebra–Homomorphismus $\widetilde{g}\colon \Lambda(M) \to \widetilde{P}$, so dass das Diagramm
  $$\begin{tikzcd} M \arrow[rr] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & & \Lambda(M) \arrow[dl, "\widetilde{g}"] \\ & \widetilde{P} & \end{tikzcd}$$
  kommutiert.

Während wir später aus der Theorie symmetrischer Algebren nur elementare Eigenschaften von Polynomringen benutzen werden, benötigen wir noch einige Informationen über äußere Algebren.

Da wir in dieser Arbeit sowohl die symmetrische als auch die äußere Algebra nur über einem endlichdimensionalen Vektorraum betrachten werden, verwenden wir schon hier die entsprechenden Formulierungen. Die folgenden Aussagen lassen sich jedoch auch für freie Moduln anstelle von Vektorräumen aufstellen (bzw. teilweise noch allgemeiner).

Sei also V ein $n+1$-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum mit Basis $\{e_0, \dots, e_n\}$.

Bemerkung 1.1.10.

- Die äußere Algebra über V ist *alternierend*, d.h. sind $e \in \Lambda^{d_1}(V)$ und $f \in \Lambda^{d_2}(V)$, so gilt
$$e \wedge f = (-1)^{d_1 d_2} f \wedge e \ ,$$
und ist d_1 ungerade, so gilt $e \wedge e = 0$.
- Für $d \in \mathbb{N}$ ist der graduierte Anteil $\Lambda^d(V)$ ein $\Bbbk$-Vektorraum der Dimension $\binom{n+1}{d}$. Insbesondere gilt $\Lambda^d(V) = 0$ für $d > \dim(V)$, und $\Lambda(V)$ ist ein $\Bbbk$-Vektorraum der Dimension 2^{n+1}.
- Die symmetrische Algebra über V hingegen ist *kommutativ*.

Lemma 1.1.11. *Wir betrachten die Abbildungen*
$$\begin{aligned} \Delta\colon \quad & \Lambda^2(V) \to V \otimes V; \quad && e \wedge f \mapsto e \otimes f - f \otimes e \\ s\colon \quad & V \otimes V \to \mathrm{Sym}_2(V); \quad && e \otimes f \mapsto ef \ . \end{aligned}$$
Dann ist Δ injektiv, s surjektiv, und es gilt $\mathrm{im}(\Delta) = \ker(s)$. Die Aussage gilt immer noch, wenn V lediglich ein freier Modul über einem Ring R ist.

Beweis. Alle drei Aussagen folgen direkt aus den Eigenschaften von äußerer bzw. symmetrischer Algebra. □

Satz 1.1.12. *Seien $W = V^*$ der Dualraum von V und $E = \Lambda(V)$. Dann sind die beiden E-Moduln $E \otimes \Lambda^{n+1} W$ und $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk)$ kanonisch isomorph.*

Beweis. Sei $\pi\colon E \to \Lambda^{n+1} V$ der Projektionshomomorphismus. Dann ist die Abbildung
$$E \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Lambda^{n+1} V); \quad e \mapsto \big(e' \mapsto \pi(e \wedge e')\big)$$
ein Isomorphismus. Damit und mit Satz 1.1.4 gilt:
$$\begin{aligned} E \otimes \Lambda^{n+1} W &= \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Lambda^{n+1} V) \otimes \Lambda^{n+1} W \\ &= \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk) \otimes \Lambda^{n+1} V \otimes \Lambda^{n+1} W \\ &= \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk) \otimes \Bbbk \\ &= \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk) \ . \end{aligned}$$
□

Wir werden später häufig mit freien Moduln arbeiten. Unsere Konstruktionen stellen aber teilweise nur sicher, dass wir projektive oder injektive Moduln erhalten (zur Definition dieser Eigenschaften siehe etwa [4, A3.2 und A3.4]). Der folgende Satz garantiert, dass diese Moduln auch frei sind.

Satz 1.1.13. *Injektive bzw. projektive Moduln über einer äußeren Algebra E sind frei.*

Beweisidee. Da E ein graduierter Ring ist, sind alle projektiven E-Moduln frei (Kaplansky 1958, [15]). Da außerdem der Dualisierungsfunktor eingeschränkt auf

$$\{\text{projektive } E\text{-Moduln}\} \longrightarrow \{\text{injektive } \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk)\text{-Moduln}\}$$

sowie auf

$$\{\text{freie } E\text{-Moduln}\} \longrightarrow \{\text{freie } \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk)\text{-Moduln}\}$$

bijektiv ist, gilt mit $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk) \cong E$ die Aussage auch für injektive Moduln. □

1.2 Homologische Grundlagen

Wir werden nun auf einige grundlegende Begriffe in der homologischen Algebra eingehen und legen dabei vor allem Wert auf die Einführung des Betti–Diagramms eines Komplexes graduierter, freier Moduln. Des Weiteren zeigen wir, dass es unter den Auflösungen eines Moduls einen in gewisser Weise kleinsten Vertreter gibt, der eindeutig bestimmt ist. Dieser Teil orientiert sich sehr stark an dem Buch *Commutative Algebra* von Eisenbud [4, Ch. 20].

Weiterhin führen wir, angelehnt an Eisenbud, Fløystad und Schreyer [5], den linearen Teil eines Komplexes freier Moduln ein. Dieser ergibt sich unter geeigneten Nebenbedingungen als derjenige Komplex, in dem alle nichtlinearen Anteile der Differenziale annulliert werden. Diese Konstruktion zerlegt einen Komplex freier Moduln in eine Summe linearer Komplexe.

Die Frage, wann wir zu einem Modul einen speziellen Komplex, nämlich eine lineare freie Auflösung, finden können, führt uns zur Definition der Castelnouvo–Mumford–Regularität. Diese führen wir abschließend ein, ohne länger auf ihre Bedeutung für allgemeine Fragestellungen einzugehen.

Für einige Betrachtungen sind besondere Eigenschaften des Grundringes von Bedeutung. Um dem Rechnung zu tragen, sei R in diesem Kapitel durchgängig eine graduierte, d.h. nach unserer Konvention auch endlich erzeugte, $\Bbbk$-Algebra.

1.2.1 Komplexe und Auflösungen

Definition 1.2.1. Ein *(aufsteigender) Komplex* $C^\bullet = (C^\bullet, d)$ *von* R*-Moduln* ist eine Folge

$$C^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} C^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

von R-Moduln C^i und R-Modul-Homomorphismen $d^i : C^i \to C^{i+1}$, so dass die Komposition aufeinanderfolgender Abbildungen 0 ist. Sind die C^i graduierte Moduln, etwa $C^i = \bigoplus_j C^i_j$, so verlangen wir zusätzlich, dass die d^i homogen vom Grad 0 sind, d.h. dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt: $d^i(C^i_j) \subseteq C^{i+1}_j$.

Der Modul C^i heißt *Term vom kohomologischen Grad* i, die Abbildungen d^i nennt man *Differenziale* des Komplexes. Ist nur ein $C^i \neq 0$, so sagen wir, dass $C^\bullet$ *im Grad* i *konzentriert* ist.

Oft ist es nützlich, den kohomologischen Grad der Terme eines Komplexes zu verschieben. Der Komplex $C^\bullet[j]$ habe dieselben Terme und Differenziale wie $C^\bullet$, jedoch sei der Term vom kohomologischen Grad i nicht C^i, sondern C^{i+j}.

Sind $(C^\bullet, d)$ und $(D^\bullet, d')$ Komplexe von R-Moduln, so ist $C^\bullet \oplus D^\bullet$ der Komplex mit den Termen $C^i \oplus D^i$ und den Differenzialen $\delta^i = d^i \oplus d'^i$.

Wir wollen zunächst einige vereinfachende Schreibweisen festlegen.

Notation 1.2.2.

- Meist schreibt man der Übersichtlichkeit halber d statt d^i, also z.B. auch $d \circ d$ für $d^{i+1} \circ d^i$.
- Ist $C^i = 0$ für alle $i > i_0$, so schreiben wir $C^\bullet$ als

  $$C^\bullet : \quad \cdots \xrightarrow{d} C^{i_0-1} \xrightarrow{d} C^{i_0} \longrightarrow 0$$

  oder gar

  $$C^\bullet : \quad \cdots \xrightarrow{d} C^{i_0-1} \xrightarrow{d} C^{i_0} \ .$$

  Analog behandeln wir die Situation $C^i = 0$ für alle $i < i_0$ sowie die Kombination beider Fälle.
- Wenn wir konkrete Komplexe freier Moduln aufschreiben, geben wir die Differenziale häufig in Form von Matrizen bzgl. der Standardbasen an. Beispielsweise beschreibt für einen Ring R die Sequenz

  $$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(1)} R \longrightarrow 0$$

  den Komplex mit mittlerem Differenzial $R \to R;\ r \mapsto 1 \cdot r$.

Wie immer, wenn in der Algebra neue Objekte eingeführt werden, sind bestimmte, strukturerhaltende Abbildungen zwischen diesen von Interesse.

Definition 1.2.3. Ein *Homomorphismus* $f\colon (C^\bullet, d) \to (D^\bullet, d')$ von Komplexen ist eine Folge $(f_i\colon C^i \to D^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Modul–Homomorphismen, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_i"'] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^i \arrow[r, "d'"] & D^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Sind $C^\bullet$ und $D^\bullet$ Komplexe graduierter Moduln, so fordern wir weiter, dass f den (internen) Grad der Moduln erhält, d.h. dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt $f_i(C^i_j) \subseteq D^i_j$.

Da die Hintereinanderausführung von zwei Differenzialen die Nullabbildung ergibt, gilt an jeder Stelle $\mathrm{im}(d^{i-1}) \subseteq \ker(d^i)$. Eine der bei Komplexen interessantesten Fragestellungen ist, wie weit man dabei von der Gleichheit entfernt ist.

Definition 1.2.4. Der Quotient

$$\mathbf{H}_i(C^\bullet) := \ker(d^i)/\mathrm{im}(d^{i-1})$$

heißt *i-te Homologie von $C^\bullet$*. Ist die Homologie an jeder Stelle 0, so heißt der Komplex *exakt*. Hat $C^\bullet$ die Gestalt

$$0 \longrightarrow C^{i_0} \xrightarrow{d} C^{i_0+1} \xrightarrow{d} \cdots \quad ,$$

so heißt $C^\bullet$ *azyklisch*, wenn $C^\bullet$ höchstens an der Stelle i_0 eine von 0 verschiedene Homologie besitzt.

Beispiel 1.2.5. Seien R ein Ring und M ein freier R-Modul. Mit den Abbildungen

$$\begin{aligned}
\Delta\colon \quad \Lambda^2(M) &\to M \otimes M; \quad a \wedge b \mapsto a \otimes b - b \otimes a \ , \\
s\colon \quad M \otimes M &\to \mathrm{Sym}_2(M); \quad a \otimes b \mapsto ab
\end{aligned}$$

ist nach Lemma 1.1.11 die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Lambda^2(M) \xrightarrow{\Delta} M \otimes M \xrightarrow{s} \mathrm{Sym}_2(M) \longrightarrow 0$$

ein exakter Komplex.

Bemerkung und Definition 1.2.6. Sei vorübergehend R ein beliebiger Ring. Die Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(1)} R \longrightarrow 0$$

ist ein exakter Komplex. Aus diesem Komplex lassen sich keinerlei Informationen über die Struktur von R extrahieren. Gleiches gilt für direkte Summen solcher Komplexe, z.B.

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\binom{1}{0}} R^2 \xrightarrow{(0\ 1)} R \longrightarrow 0 \quad ,$$

was sich als Summe

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{(1)} & R & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\ & & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{(1)} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

schreiben lässt. Komplexe dieser Art heißen *trivial*.

Im Gegensatz dazu betrachten wir Komplexe, die keine trivialen Anteile haben: Ist R eine graduierte $\Bbbk$-Algebra, so heißt ein Komplex $C^\bullet$ von freien R-Moduln *minimal*, wenn für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\operatorname{im}(d^i) \subseteq R_{\geq 1} C^{i+1} \ .$$

Somit können minimale Komplexe keine trivialen Summanden enthalten.

Die einfachsten Moduln sind sicherlich die freien Moduln, weswegen wir bevorzugt mit diesen arbeiten wollen. Stoßen wir auf kompliziertere Moduln, so lassen diese sich jedoch wenigstens durch eine Folge von freien Moduln und Abbildungen zwischen diesen beschreiben.

Betrachten wir beispielsweise einen endlich erzeugten R-Modul M mit Erzeugendensystem $\{m_1, \ldots m_r\}$. Seien $F^0 = R^r$ der freie R-Modul mit der kanonischen Basis $\{e_1, \ldots e_r\}$ und $\varphi^0\colon F^0 \to M$ diejenige (surjektive) Abbildung, die e_i auf m_i abbildet.

Im Allgemeinen wird φ^0 nicht injektiv sein, doch da R noethersch ist, ist $\ker(\varphi^0)$ wieder endlich erzeugt. Wiederholen wir diese Überlegungen für $\ker(\varphi^0)$ anstelle von M, so erhalten wir einen zweiten freien R-Modul F^{-1} und einen Epimorphismus $F^{-1} \to \ker(\varphi^0)$. Die komponierte Abbildung $F^{-1} \to \ker(\varphi^0) \to F^0$ nennen wir φ^{-1}. Fahren wir auf diese Weise fort, so ergibt sich ein exakter Komplex

$$\cdots \longrightarrow F^{-2} \xrightarrow{\varphi^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} F^0 \xrightarrow{\varphi^0} M \longrightarrow 0 \quad .$$

Diese Konstruktion führt zu folgenden Definitionen:

Definition 1.2.7. Ein Komplex der Form

$$I^\bullet : \qquad I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

mit injektiven Moduln I^i und $\mathbf{H}_i(I^\bullet) = 0$ für $i \neq 0$ heißt *injektive Auflösung* von $\ker(I^0 \to I^1)$.

Ein Komplex der Form

$$P^\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0$$

mit projektiven Moduln P^i und $\mathbf{H}_i(P^\bullet) = 0$ für $i \neq 0$ heißt *projektive Auflösung* von $\operatorname{coker}(P^{-1} \to P^0)$. Sind die P^i frei, so sprechen wir auch von einer *freien Auflösung.*

Ist M ein endlich erzeugter R-Modul und $\cdots \longrightarrow F^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} F^0$ (mit endlich erzeugten R-Moduln F^i) eine freie Auflösung von M, so heißt die Sequenz

$$F^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} F^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine *freie Präsentation* von M. Eine Matrix, die φ^{-1} bzgl. der Standardbasen von F^{-1} und F^0 darstellt, heißt *Präsentationsmatrix* von M.

Bemerkung 1.2.8.

- Wir wollen hier nicht näher auf die Definition von injektiven und projektiven Moduln eingehen, sondern verweisen auf [4, A3.2 und A3.4]. Der Grund dafür ist, dass in den von uns studierten Anwendungen über äußeren Algebren injektive oder projektive Moduln schon notwendig frei sein werden (vgl. Satz 1.1.13), so dass wir auf die Unterscheidung zwischen injektiven, projektiven und freien Moduln verzichten können.

- Ist $\cdots \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow F^0$ eine freie Auflösung eines R-Moduls M, so schreiben wir auch

  $$\cdots \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow F^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

  für diese Auflösung. Analog verfahren wir bei injektiven Auflösungen.

- Wir haben bereits gesehen, dass jeder endlich erzeugte R-Modul M eine freie Auflösung besitzt. Zusätzlich werden wir noch zeigen (Satz 1.2.17), dass diese unter Annahme einer Minimalitätsbedingung im Wesentlichen eindeutig ist.

- Bei der einführenden Konstruktion haben wir vorausgesetzt, dass der betrachtete R-Modul endlich erzeugt ist. Dies ist für die Theorie nicht nötig, erlaubt jedoch die praktische Berechnung von freien Auflösungen.

- Eine wichtige Anwendung von Präsentationsmatrizen findet sich in der Computeralgebra. Präsentationsmatrizen erlauben es nämlich, einen endlich erzeugten R-Modul, also ein meist unendliches Gebilde, durch ein endliches, nämlich eine solche Matrix, zu codieren.

Beispiel 1.2.9. Betrachten wir zwei einfache Auflösungen.

- Sind $R = \Bbbk[x_0, x_1]$ ein Polynomring und $M = R_{\geq 1} = \bigoplus_{d\geq 1} R_d$, so ist

$$0 \longrightarrow R(-2) \xrightarrow{\binom{x_1}{-x_0}} R(-1)^2 \xrightarrow{(x_0, x_1)} M \longrightarrow 0$$

  eine freie Auflösung von M. Dabei steht $R(i) = \bigoplus_d (R(i))_d = \bigoplus_d R_{di}$ für den um i getwisteten Modul.

- Seien $\Bbbk$ ein Körper und $E = \Lambda V$ die äußere Algebra über dem eindimensionalen $\Bbbk$-Vektorraum $V = \langle e_0 \rangle$. Der Modul E besitzt die injektive Auflösung

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{e_0} E(1) \xrightarrow{e_0} E(2) \xrightarrow{e_0} \cdots \quad .$$

Bemerkung 1.2.10. Wir haben in diesem Beispiel erstmalig getwistete Moduln verwendet. Dies ist nicht unbedingt nötig, d.h. wir hätten den zweiten Komplex auch in der Form

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{e_0} E \xrightarrow{e_0} E \xrightarrow{e_0} \cdots \quad .$$

schreiben können. Wenn wir Komplexe freier, graduierter Moduln betrachten, empfiehlt es sich jedoch, eine Änderung der Graduierung so vorzunehmen, dass die Differenziale alle den Grad 0 haben, d.h. Elemente vom Grad d auf Elemente vom Grad d abbilden. Genau dies haben wir getan, denn ein Element $e \in E(i)_d$ wird auf das Element $e_0 \wedge e \in E(i+1)$ abgebildet, und es gilt $\deg_{E(i+1)}(e_0 \wedge e) = \deg_{E(i)}(e_0 \wedge e) - 1 = \deg_{E(i)}(e)$.

Definition 1.2.11. Ist $F^\bullet$ ein Komplex graduierter, freier R-Moduln, etwa

$$F^\bullet : \; \cdots \longrightarrow F^{-1} \xrightarrow{d} F^0 \xrightarrow{d} F^1 \longrightarrow \cdots \;,$$

so ist jeder Modul F^i die direkte Summe von Twists von R, also von der Form $F^i = \bigoplus_j R(j)^{b_{i,j}(F^\bullet)}$. Die Zahlen $b_{i,j}(F^\bullet)$, kurz $b_{i,j}$, heißen die *graduierten Betti–Zahlen* von $F^\bullet$. Das Diagramm

$$\begin{array}{r|ccccc}
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
2 & \cdots & b_{-1,3} & b_{0,2} & b_{1,1} & \cdots \\
1 & \cdots & b_{-1,2} & b_{0,1} & b_{1,0} & \cdots \\
0 & \cdots & b_{-1,1} & b_{0,0} & b_{1,-1} & \cdots \\
-1 & \cdots & b_{-1,0} & b_{0,-1} & b_{1,-2} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots
\end{array}$$

heißt das *Betti–Diagramm* von $F^\bullet$. Es beschreibt vollständig die beteiligten freien Moduln F^i.

Bemerkung 1.2.12.

- Häufig werden Auflösungen nicht wie bei uns aufsteigend, sondern absteigend geschrieben, etwa

  $$\cdots \longleftarrow F_{-1} \longleftarrow F_0 \longleftarrow F_1 \longleftarrow \cdots \; .$$

  In diesem Fall entsteht ein horizontal gespiegeltes Betti–Diagramm. Dies geschieht etwa bei der Angabe eines Betti–Diagramms durch Computeralgebra–Programme wie Macaulay2. Dort ist oft auch die Reihenfolge der Zeilen invertiert.

  Wir nutzen die oben eingeführte Konvention für Betti–Diagramme, da so bei unserer Schreibweise für Komplexe ein Komplex und sein Diagramm gleich ausgerichtet sind, d.h. ein im Komplex weiter rechts notierter Term erscheint auch im Betti–Diagramm weiter rechts.

- Bei der Form des Betti–Diagramms ist zu bemerken, dass in der i-ten Spalte der j-ten Zeile nicht $b_{i,j}$ steht, sondern $b_{i,j-i}$.

  Ein Grund dafür ist, dass auf diese Weise bei lineare Auflösungen ein ebenfalls „lineares“ Betti–Diagramm haben, d.h. ist F^0 in einem Grad konzentriert, so besteht das Diagramm nur aus einer von 0 verschiedenen Zeile.

- Eine weitere Kompaktifizierung erreichen wir durch das Weglassen von Zeilen und Spalten, deren Einträge alle 0 sind.

Beispiele 1.2.13. Wir betrachten wieder die Beispiele aus 1.2.9. Den dort betrachteten Auflösungen

$$0 \longrightarrow R(-2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix}} R(-1)^2$$

und

$$E(1) \xrightarrow{e_0} E(2) \xrightarrow{e_0} \cdots$$

entsprechen die Betti–Diagramme

$$\begin{array}{c|cc} -1 & 1 & 2 \\ \hline & -1 & 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \hline & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

wobei das erste Diagramm in beide Richtungen und das zweite nach links mit Nullen ergänzt werden kann.

1.2.2 Die Eindeutigkeit minimaler, freier Auflösungen

Freie Auflösungen eines endlich erzeugten Moduls M lassen sich wie gesehen erzeugen, indem wir sukzessive Erzeuger verschiedener Moduln wählen. Diese Wahlfreiheit bewirkt, dass die Eindeutigkeit einer Auflösung a priori keineswegs gesichert ist.

Beispiel 1.2.14. In Bemerkung 1.2.6 haben wir gesehen, dass triviale Komplexe keine Homologie besitzen. Ist also

$$F^\bullet: \ \cdots \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow F^0 \longrightarrow 0$$

ein trivialer Komplex und $G^\bullet$ eine freie Auflösung eines Moduls M, so ist auch $F^\bullet \oplus G^\bullet$ eine freie Auflösung von M.

Dies ist einer der einfachsten Gründe für die fehlende Eindeutigkeit von Auflösungen. Er entspricht dem Unterschied zwischen der Wahl minimaler und redundanter Erzeugendensysteme.

Wir werden nun zeigen, dass im Fall von Moduln über einer graduierten $\Bbbk$-Algebra alle essenziellen Unterschiede zwischen je zwei freien Auflösungen desselben Moduls von dieser Art sind, und dass daher die minimale freie Auflösung im Wesentlichen eindeutig ist.

Sei also weiterhin R eine graduierte $\Bbbk$-Algebra, d.h. insbesondere ein endlich erzeugter und damit noetherscher Ring mit eindeutig bestimmtem maximalem Ideal $R_{\geq 1}$.

Lemma 1.2.15. *Ist*

$$F^\bullet: \ \cdots \longrightarrow F^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} F^0 \longrightarrow 0$$

eine freie Auflösung der 0*, so ist* $F^\bullet$ *trivial.*

Beweis. Da F^0 frei ist, spaltet der Epimorphismus d^{-1}, d.h. wir können F^{-1} derart als Summe $F^{-1} = F^0 \oplus \widetilde{F}^{-1}$ schreiben, dass die Einschränkung $d^{-1}|_{F^0}$ maximalen Rang hat. Ist $\pi : F^{-1} \to F^0$ die Projektion auf die erste Komponente, so gilt

$$\widetilde{F}^{-1} = \ker(\pi) = \operatorname{im}(d^{-2}) \ .$$

Daher lässt sich F als Summe der Komplexe

$$G_1{}^\bullet: \ 0 \longrightarrow F^0 \xrightarrow{\mathrm{id}} F^0 \longrightarrow 0$$

und

$$F'^\bullet: \ \cdots \longrightarrow F^{-3} \xrightarrow{d^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} \widetilde{F}^{-1} \longrightarrow 0$$

schreiben. $G_1{}^\bullet$ ist trivial und $F'^\bullet$ wieder eine freie Auflösung der 0. Setzen wir dieses Verfahren beginnend mit $F'^\bullet$ fort, so erhalten wir eine Zerlegung

$$F^\bullet = G_1{}^\bullet \oplus G_2{}^\bullet \oplus \ldots$$

von $F^\bullet$ als Summe trivialer Komplexe. Somit ist $F^\bullet$ selbst trivial. ☐

Lemma 1.2.16. *Seien M und N zwei R-Moduln, φ: $M \to N$ ein Homomorphismus, $(F^\bullet, d)$ eine freie Auflösung von M und $(G^\bullet, \delta)$ eine freie Auflösung von N. Dann existiert eine Abbildung $\overline{\varphi}$: $F^\bullet \to G^\bullet$, die φ induziert. Wir sagen φ liftet zu $\overline{\varphi}$.*

Ist $\widetilde{\varphi}$: $F^\bullet \to G^\bullet$ eine weitere solche Abbildung, so sind $\overline{\varphi}$ und $\widetilde{\varphi}$ homotop, *d.h. es existiert eine Folge von Abbildungen s_i: $F^i \to G^{i-1}$, so dass $\overline{\varphi}_i - \widetilde{\varphi}_i = \delta^{i-1}s_i + s_{i+1}d^i$.*

Beweis. Existenz: Sei f: $N \to G^0$ so definiert, dass $\delta^0 f = \mathrm{id}$ gilt. Dies ist möglich, da δ^0 surjektiv ist. Wir setzen $\overline{\varphi}_0 = f\varphi d^0$. Damit kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\overline{\varphi}_0"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ G^0 \arrow[r, "\delta^0"] & N \end{tikzcd}$$

Da $\delta^{-1}(G^{-1}) = \ker(\delta^0)$ gilt und damit das Bild von $\overline{\varphi}_0 d^{-1}$ in $\ker(\delta^0)$ liegt, können wir analog zu obiger Situation $\overline{\varphi}_{-1}$ definieren. Induktiv erhalten wir einen Homomorphismus $\overline{\varphi}$ von Komplexen.

Eindeutigkeit bis auf Homotopie: Haben $\widetilde{\varphi}$ und $\overline{\varphi}$ die geforderten Eigenschaften, so ist die Differenz $\widetilde{\varphi} - \overline{\varphi}$ eine Liftung der Nullabbildung. Es genügt also, die Aussage für $\varphi = 0$ und dessen Liftung $\overline{\varphi} = 0$ zu zeigen.
In diesem Fall gilt $\widetilde{\varphi}(F^0) \subseteq \mathrm{im}(\delta^{-1})$, da $\widetilde{\varphi}_0$ auf $\mathrm{coker}(d^{-1})$ die Nullabbildung ist. Ähnlich wie oben können wir $\widetilde{\varphi}_0$ zu einer Abbildung s_0: $F^0 \to G^{-1}$ liften, so dass $\delta^{-1}s_0 = \widetilde{\varphi}_0$ gilt.
Nun wollen wir zu s_0 ein geeignetes s_{-1}: $F^{-1} \to G^{-2}$ konstruieren. Dazu bemerken wir

$$\delta^{-1}(s_0 d^{-1} - \widetilde{\varphi}_{-1}) = \widetilde{\varphi}_0 d^{-1} - \delta^{-1}\widetilde{\varphi}_{-1} = 0\ .$$

Somit gilt $\mathrm{im}(s_0 d^{-1} - \widetilde{\varphi}_{-1}) \subseteq \ker(\delta^{-1}) = \mathrm{im}(\delta^{-1})$. Da F^{-1} frei (und damit insbesondere projektiv) ist, können wir auch diese Abbildung liften, diesmal zu s_{-1}: $F^{-1} \to G^{-2}$. Induktiv erhalten wir eine Homotopie zwischen $\widetilde{\varphi}$ und der Nullabbildung. □

Satz 1.2.17 (Eindeutigkeit minimaler freier Auflösungen). *Ist M ein endlich erzeugter R-Modul und $F^\bullet$ eine minimale freie Auflösung von M, so ist jede freie Auflösung von M isomorph zur direkten Summe von $F^\bullet$ mit einem trivialen Komplex.*

Beweis. Sei $G^\bullet$ eine weitere freie Auflösung von M. Dann gibt es Liftungen α: $F^\bullet \to G^\bullet$ und β: $G^\bullet \to F^\bullet$ der Identität auf M. Außerdem ist $\beta \circ \alpha$ homotop zur Identität auf $F^\bullet$. Daher ist $\mathrm{id} - \beta_i \circ \alpha_i$: $F_i \to F_i$ eine Summe von Abbildungen, die durch die Differenziale von $F^\bullet$ faktorisieren. Da $F^\bullet$ minimal ist, bedeutet das, dass $(\mathrm{id} - \beta_i \circ \alpha_i)(F_i)$ in $R_{\geq 1}F_i$ liegt. Es folgt, dass $\det(\beta_i \circ \alpha_i) \equiv 1 \bmod R_{\geq 1}$ und damit $\beta \circ \alpha$ ein Automorphismus von $F^\bullet$ ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir somit annehmen, dass $\beta \circ \alpha$ die Identität auf $F^\bullet$ ist. Dann spaltet α durch β. Sei $H^\bullet = \operatorname{coker}(\alpha)$. Dann gilt $G^\bullet \cong F^\bullet \oplus H^\bullet$, also auch $\mathbf{H}(G^\bullet) \cong \mathbf{H}(F^\bullet) \oplus \mathbf{H}(H^\bullet)$. Da α auf den Homologiemoduln einen Isomorphismus induziert, gilt $\mathbf{H}(H^\bullet) = 0$, also ist nach Lemma 1.2.15 der Komplex $H^\bullet$ trivial. □

1.2.3 Der lineare Teil eines Komplexes

Sei R weiterhin eine graduierte $\Bbbk$-Algebra.

Wir haben gesehen, dass triviale Komplexe im Wesentlichen uninteressant für weitere Untersuchungen sind. Die Differenziale in trivialen Komplexen lassen sich durch Matrizen mit konstanten Einträgen beschreiben; damit ist der einfachste Fall nicht–trivialer Komplexe von graduierten R-Moduln derjenige, in dem die Differenziale durch Matrizen von Linearformen gegeben sind. Solche Komplexe haben bereits die angenehme Eigenschaft, minimal zu sein. Wir wollen uns im Folgenden Gedanken darüber machen, wie wir einem beliebigen Komplex einen sogenannten linearen Komplex zuordnen können.

Definition 1.2.18. Sei A eine Matrix über R. Dann ist der *lineare Teil* $\operatorname{lin}(A)$ von A diejenige Matrix, die man durch Ersetzen aller Einträge vom Grad > 1 durch 0 erhält.

Beispiel 1.2.19. Seien a, b, c Linearformen auf R. Dann ist

$$\operatorname{lin}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wir wollen nun die Definition des linearen Teils einer Matrix auf Komplexe erweitern. Die erste Idee, dazu alle repräsentierenden Matrizen der Differenziale durch ihren linearen Teil zu ersetzen, funktioniert im Allgemeinen nicht, da das Reduzieren auf den linearen Teil nicht mit Basiswechseln kommutiert.

Beispiel 1.2.20. Seien a, b, c Linearformen auf R, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, und sei der Basiswechsel $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Dann gilt

$$\operatorname{lin}(A) \cdot \operatorname{lin}(B) = \begin{pmatrix} a & ac \\ 0 & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \operatorname{lin}(AB) .$$

Außerdem entsteht bei dieser Prozedur nicht notwendig wieder ein Komplex.

Beispiel 1.2.21. Sei E die äußere Algebra über einem $\Bbbk$-Vektorraum V mit Basis e_0 und e_1. Dann ist

$$E \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} e_0 \wedge e_1 \\ e_0 \end{smallmatrix}\right)} E(1)^2 \xrightarrow{(\,1, e_1\,)} E(2)$$

ein Komplex,

$$E \xrightarrow{\binom{0}{e_0}} E(1)^2 \xrightarrow{(1, e_1)} E(2)$$

jedoch nicht.

Im Fall minimaler Auflösungen kann dieses Problem glücklicherweise nicht auftreten.

Lemma 1.2.22. *Seien F, G und H freie R-Moduln und $d\colon F \to G$ und $e\colon G \to H$ Homomorphismen mit $ed = 0$. Ist weiter* $\operatorname{im}(d) \subseteq R_{\geq 1}G$ *sowie* $\operatorname{im}(e) \subseteq R_{\geq 1}H$*, so gilt auch* $\operatorname{lin}(e)\operatorname{lin}(d) = 0$.

Beweis. Seien Basen von F, G und H gewählt, d und e bezüglich dieser Basen durch Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ gegeben, und sei $ed = 0$. Dann gilt für alle i, j:

$$\sum_k a_{ik} b_{kj} = 0 \ .$$

Spalten wir die Summe nach Graden auf, so folgt

$$0 = \sum_{k\colon \deg(a_{ik}b_{kj})=2} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k\colon \deg(a_{ik})=\deg(b_{kj})=1} a_{ik} b_{kj} \ ,$$

wobei die zweite Gleichheit daraus folgt, dass A und B aufgrund der Vorbedingungen an d und e keine Komponenten vom Grad < 1 haben. $\square$

Daher können wir den linearen Teil wenigstens für minimale Komplexe wie gewünscht definieren:

Definition 1.2.23. Sei $F^\bullet$ ein minimaler Komplex freier R-Moduln. Der *lineare Teil* $\operatorname{lin}(F^\bullet)$ von $F^\bullet$ sei der Komplex, der entsteht, wenn man die Differenziale d von $F^\bullet$ durch ihren linearen Teil $\operatorname{lin}(d)$ ersetzt.

Ist $F^\bullet = \operatorname{lin}(F^\bullet)$, so heißt der Komplex *linear*.

Bemerkung 1.2.24. Der lineare Teil eines minimalen, freien Komplexes ist die direkte Summe von linearen Komplexen ${F_j}^\bullet$, deren i-ter Term aus einer direkten Summe von Kopien von $R(i - j)$ besteht.

Beispiel 1.2.25. Sei $R = E$ die äußere Algebra über einem $\Bbbk$-Vektorraum V mit Basis e_0, e_1 und e_2. Dann ist

$$E^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1e_0 & e_2e_0 & 0 \end{pmatrix}} E(1) \oplus E(2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & e_0 \\ e_0e_2 & e_1 \\ e_1e_2 & e_2 \end{pmatrix}} E(3)^3$$

ein minimaler Komplex freier E-Moduln. Sein linearer Teil

$$E^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} E(1) \oplus E(2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & e_0 \\ 0 & e_1 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}} E(3)^3$$

lässt sich als Summe

$$\begin{array}{ccccc} E^3 & \xrightarrow{(e_0\ e_1\ e_2)} & E(1) & & \\ & & \oplus & & \\ & & E(2) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}} & E(3)^3 \end{array}$$

zweier minimaler, linearer Komplexe schreiben.

1.2.4 Castelnuovo–Mumford–Regularität

Wie bei allgemeinen Komplexen ist auch bei Auflösungen der einfachste Fall derjenige linearer Auflösungen. Wir können sicher nicht erwarten, dass jeder Modul M eine lineare Auflösung besitzt, doch oft genügt es zu wissen, dass für geeignetes $r \in \mathbb{N}$ der Untermodul $M_{\geq r} = \bigoplus_{d \geq r} M_d$ von M linear auflösbar ist.

Auch hier betrachten wir nur den Fall, dass R eine graduierte $\Bbbk$-Algebra ist.

Satz 1.2.26. *Sei M ein endlich erzeugter, graduierter R-Modul. Dann existiert eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$, so dass $M_{\geq r}$ von M_r erzeugt wird und eine lineare Auflösung besitzt.*

Definition 1.2.27. Sei M ein graduierter R-Modul. Existiert eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, für die $M_{\geq r}$ von M_r erzeugt wird und eine lineare Auflösung besitzt, und ist $r_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt r_0 die *Castelnuovo–Mumford–Regularität* oder einfach *Regularität* $\operatorname{reg}(M)$ von M und M heißt r_0*-regulär*

Beispiel 1.2.28.

- Jeder graduierte Ring R ist offensichtlich 0-regulär.
- Sei R der Polynomring $R = \Bbbk[x_0, x_1]$ und $M = R_{\geq 1}$. Dann wird M von den Elementen $x_0, x_1 \in M_1$ erzeugt, $M(d)$ hat also Erzeuger im Grad $d+1$. Weiter besitzt $M(d) = M(d)_{\geq d+1}$ die minimale Auflösung

  $$0 \longrightarrow R(d-2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 \end{pmatrix}} R(d-1)^2 \xrightarrow{(x_0, x_1)} M(d)$$

  mit linearen Differenzialen. Damit ist $\operatorname{reg}(M(d)) = d+1$.

1.3 Young–Tableaus und Schurmoduln

In diesem Abschnitt wollen wir kurz auf einige elementare Kapitel der Darstellungstheorie eingehen. Unser Hauptaugenmerk richten wir dabei auf die so genannten Schurmoduln, die eine Verallgemeinerung von symmetrischer und äußerer Algebra darstellen. Da wir später nur diesen sehr begrenzten Ausschnitt der Darstellungstheorie benötigen, verzichten wir auf die vollständige Darlegung aller Sprechweisen und beschränken uns auf Zitate der wesentlichen Resultate. Eine umfassende Einführung in die Darstellungstheorie findet sich beispielsweise in dem Buch von Fulton und Harris [9]. Speziell mit den hier benötigten Young–Tableaus und Schurmoduln befasst sich Fulton in [8].

Definition 1.3.1. Sei $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Ein Tupel

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$$

heißt *Partition* von d, in Zeichen $\lambda \vdash d$, wenn gilt

(i) $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = d$

(ii) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$.

Wir schreiben auch $|\lambda| = d$ für die partitionierte Zahl. Gegeben eine Partition λ heißt die Partition $\overline{\lambda}$, die definiert ist durch

$$\overline{\lambda}_j = \big| \{i \in \{1, \ldots, k\} \,|\, \lambda_i \geq j\} \big| \ ,$$

die *zu λ konjugierte Partition* von d.

Jeder Partition entspricht ein *Young–Diagramm* der Form

$$\begin{array}{r|c|c|c|} \cline{2-4} \lambda_1 & & & \\ \cline{2-4} \lambda_2 & & & \\ \cline{2-4} \lambda_3 & & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \lambda_4 & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

mit λ_i Kästchen in der i-ten Zeile, wobei alle Zeilen linksbündig notiert sind. Oft werden wir Partition und zugehöriges Diagramm identifizieren. Auf der Ebene der Young–Diagramme entspricht Konjugation gerade dem Spiegeln an derjenigen Diagonalen, die im oberen linken Kästchen beginnt.

Eine Nummerierung der Kästchen eines Young–Diagramms mit den Zahlen $1, \ldots, d$, etwa

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 9 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

heißt *Tableau* des Diagramms bzw. der Partition. Sind die Kästchen analog zu obigem Beispiel belegt, sprechen wir von dem *kanonischen Tableau* zu λ.

Die gerade eingeführten Young–Diagramme werden uns helfen, bestimmte Moduln zu beschreiben, die als direkte Summanden im d-ten Tensorprodukt eines Vektorraums enthalten sind, und die eine Verallgemeinerung von äußerer und symmetrischer Algebra bilden.

Sei dazu von nun an V ein $\Bbbk$-Vektorraum. Zur Definition genannter Moduln müssen wir erst einmal kurz ausholen und eine Algebra über der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_d$ definieren.

Bemerkung und Definition 1.3.2. Sei G eine endliche, multiplikative Gruppe (bei uns wird dies immer $\mathfrak{S}_d$ sein). Die freie, $\Bbbk$-additive Gruppe über den Elementen von G erhält durch die von der Multiplikation auf G induzierte Verknüpfung eine $\Bbbk$-Algebrastruktur. Die entstehende Algebra heißt *Gruppenalgebra* $\Bbbk G$ von G.

Definition 1.3.3. Ist $\lambda \vdash d$ eine Partition, so wählen wir zwei Untergruppen $P_\lambda, Q_\lambda \subseteq \mathfrak{S}_d$ so, dass

- P_λ genau die Permutationen enthält, die im kanonischen Tableau von λ keine Elemente aus verschiedenen Zeilen miteinander vertauschen,
- Q_λ genau die Permutationen enthält, die im kanonischen Tableau von λ keine Elemente aus verschiedenen Spalten miteinander vertauschen.

Dann gilt $P_\lambda \cong \bigoplus_i \mathfrak{S}_{\lambda_i}$ und $Q_\lambda \cong \bigoplus_j \mathfrak{S}_{\overline{\lambda}_j}$. In der Gruppenalgebra $\Bbbk\mathfrak{S}_d$ definieren wir mit Hilfe dieser beiden Untergruppen von $\mathfrak{S}_d$ die Elemente

$$a_\lambda := \sum_{\sigma \in P_\lambda} \sigma \ , \quad b_\lambda := \sum_{\sigma \in Q_\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \ .$$

Ist V ein $\Bbbk$-Vektorraum, und operiert $\mathfrak{S}_d$ auf $V^{\otimes d}$ von rechts durch Permutation der Faktoren, also durch

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(d)} \ ,$$

dann ist das Bild der von a_λ induzierten Abbildung $a_\lambda \colon V^{\otimes d} \to V^{\otimes d}$ gerade der Unterraum

$$\operatorname{im}(a_\lambda) = \bigotimes_{i=1}^{k} \operatorname{Sym}_{\lambda_i} V \ ,$$

das Bild von $b_\lambda \colon V^{\otimes d} \to V^{\otimes d}$ ist der Unterraum

$$\operatorname{im}(b_\lambda) = \bigotimes_{j=1}^{l} \Lambda^{\overline{\lambda}_j} V \ .$$

Bemerkung und Definition 1.3.4. Sei $\lambda \vdash d$ eine Partition. Das Produkt $c_\lambda := a_\lambda \cdot b_\lambda \in \Bbbk\mathfrak{S}_d$, sowie auch die induzierte Abbildung $c_\lambda \colon V^{\otimes d} \to V^{\otimes d}$, heißt *Symmetrisierende* zu λ. Es gilt $\operatorname{im}(c_\lambda) \supseteq \operatorname{im}(c_\lambda \circ c_\lambda)$. Genauer existiert

eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $c_\lambda \circ c_\lambda = n^2 c_\lambda$.
Das Bild $V^\lambda := c_\lambda(V^{\otimes d}) \subseteq V^{\otimes d}$ heißt *Schurmodul*. Es ist eine *irreduzible Darstellung* von $\mathfrak{S}_d$, d.h. V^λ besitzt keine nichttrivialen, unter der Operation von $\mathfrak{S}_d$ invarianten Unterräume.

Die Schurmoduln zu gegebenem $d \in \mathbb{N}$ interpolieren gewissermaßen zwischen $\Lambda^d V$ und $\mathrm{Sym}_d V$:

Beispiel 1.3.5. Ist λ die Partition $\lambda = (1, \ldots, 1)$ von d, so ist die zugehörige Symmetrisierende $c_\lambda = b_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma$, also gilt $V^\lambda = \Lambda^d V$. Ist $\lambda = (d)$, so folgt $c_\lambda = a_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sigma$, also $V^\lambda = \mathrm{Sym}_d V$.

Wir wollen nun betrachten, wie sich etwa $V^{\otimes d}$ als Summe dieser irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}_d$ schreiben lässt.

Beispiel 1.3.6. Für $d = 2$ ist uns die Zerlegung bereits bekannt, beispielsweise aus Lemma 1.1.11: $V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}_2 V \oplus \Lambda^2 V = V^{(2)} \oplus V^{(1,1)}$. Doch schon für $d = 3$ ist eine Zerlegung mit den bisher vorgestellten Mitteln nicht möglich.

Zur Klärung unserer Frage, wie wir $V^{\otimes d}$ zerlegen können, wollen wir direkt das allgemeinere Problem der Zerlegung von Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen lösen.

Definition 1.3.7. Gegeben seien ein Young–Diagramm und eine Partition $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \vdash e$. Eine *$\mu$-Erweiterung* des Diagramms erhalten wir durch sukzessives Hinzufügen von μ_i Kästchen, $i = 1, \ldots, k$, wobei nach jedem Schritt wieder ein Young–Diagramm entstehen muss.
Indem wir in der obersten Zeile beginnen und zeilenweise von rechts nach links vorgehen, schreiben wir zu jedem der neuen Kästchen auf, in welchem Schritt es hinzugefügt wurde. Die Erweiterung heißt *streng*, wenn für jedes $t \in \{1, \ldots, e\}$ die ersten t Einträge der so entstandenen Liste jede Zahl in $\{1, \ldots, k-1\}$ wenigstens so oft enthalten wie ihren Nachfolger.

Satz 1.3.8 (Littlewood–Richardson–Regel). *Seien $d, e \in \mathbb{N}$ und V ein $\mathbb{k}$-Vektorraum. Wir betrachten $\mathfrak{S}_d$ als Untergruppe von $\mathfrak{S}_{d+e}$. Dann gilt für Partitionen $\lambda \vdash d$, $\mu \vdash e$:*

$$V^\lambda \otimes V^\mu = \bigoplus_{\nu \vdash d+e} N_{\lambda,\mu,\nu} V^\nu \ .$$

Die Zahlen $N_{\lambda,\mu,\nu} \in \mathbb{N}$ entsprechen dabei der Anzahl verschiedener Möglichkeiten, das Young–Diagramm von λ durch eine strenge μ-Erweiterung zum Young–Diagramm von ν zu ergänzen.

Auch wenn mehrere Methoden zur Berechnung der Koeffizienten obiger Formel existieren, ist es nicht leicht, eine Intuition für die Gestalt dieser Koeffizienten zu entwickeln. Der für uns wichtigste Spezialfall der Littlewood–Richardson–Regel, die Pieri–Formel, erlaubt jedoch die auch anschauliche Beschreibung der Zerlegung spezieller Tensorprodukte von Schur–Moduln.

Satz 1.3.9 (Pieri–Formel). *Seien $\lambda \vdash d$ eine Partition und $e \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$V^{\lambda} \otimes V^{(e)} = \bigoplus_{\mu} V^{\mu} \ ,$$

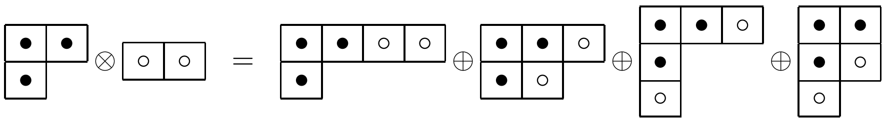
wobei die Summe über alle Partitionen $\mu \vdash d + e$ läuft, deren Young–Diagramm aus dem von λ durch Hinzufügen von e Kästchen in paarweise verschiedene Spalten entsteht.

Beispiel 1.3.10.

- Das Tensorprodukt von $V^{(2,1)}$ und $V^{(2)}$ zerlegt sich in die Summanden

  $$V^{(2,1)} \otimes V^{(2)} = V^{(4,1)} \oplus V^{(3,2)} \oplus V^{(3,1,1)} \oplus V^{(2,2,1)},$$

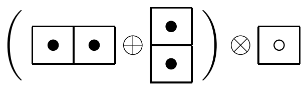
  was sich anschaulich aus den Diagrammen

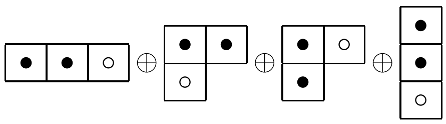
  

  ergibt.

- Ähnlich lässt sich rekursiv auch die Zerlegung von $V^{\otimes d}$ bestimmen. Wir erhalten auf diese Weise erneut $V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}_2 V \oplus \Lambda^2 V$, sowie das neue Resultat $V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}_3 V \oplus 2V^{(2,1)} \oplus \Lambda^3 V$, das wieder sehr leicht zu veranschaulichen ist:

  $$V^{\otimes 3} = (\mathrm{Sym}_2 V \oplus \Lambda^2 V) \otimes V$$

  $=$ 

  $=$ 

Korollar 1.3.11. *Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(i) $\mathrm{Sym}_d V \otimes \mathrm{Sym}_d V = \bigoplus_{a=0,\dots,d} V^{(2d-a,a)}$,

(ii) $\Lambda^2(\mathrm{Sym}_d V) = \bigoplus_{\substack{a=0,\dots,d,\\ a \text{ ungerade}}} V^{(2d-a,a)}$,

$\mathrm{Sym}_2(\mathrm{Sym}_d V) = \bigoplus_{\substack{a=0,\dots,d,\\ a \text{ gerade}}} V^{(2d-a,a)}$.

Beweis. Teil (i) folgt direkt aus der Pieri–Formel. Außerdem zerlegt sich $\mathrm{Sym}_d V \otimes \mathrm{Sym}_d V$ als $\Lambda^2(\mathrm{Sym}_d V) \oplus \mathrm{Sym}_2(\mathrm{Sym}_d V)$.

Betrachtet man $V^{(2d-a,a)}$ als Bild von $V^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d}$ unter der Abbildung $c_{(2d-a,a)}$, so ist dieses Bild genau dann invariant unter Vertauschung der zwei Faktoren, wenn a gerade ist. □

Zuletzt benötigen wir noch einen Satz über Abbildungen zwischen irreduziblen Darstellungen, den wir in Kapitel 3 auf die Schurmoduln in Zerlegungen von $V^{\otimes d}$ und ähnlichen Moduln anwenden werden.

Satz 1.3.12 (Schurs Lemma). *Ist G eine Gruppe, so ist jeder G-Modul–Homomorphismus φ zwischen verschiedenen, d.h. nicht isomorphen, irreduziblen Darstellungen von G schon die Null–Abbildung.*

Beweis. Kern und Bild von φ sind invariant unter G, also im Fall irreduzibler Darstellungen trivial. □

1.4 Kohärente Garben und Garbenkohomologie

Eine in sich geschlossene Abhandlung auch nur der wichtigsten Resultate der Garbentheorie würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher führen wir lediglich die unmittelbar nötigen Objekte und Begriffe ein, ohne uns zu sehr auf das erschöpfende Studium all ihrer Eigenschaften zu konzentrieren. Außerdem zitieren wir sämtliche Sätze ohne Beweis. Quelle dafür sind der Artikel *Faisceaux algébriques cohérents* von Serre [17], der eine ausführliche Abhandlung der Theorie kohärenter Garben enthält, sowie die Kapitel II.1 bis II.5 (Garben und Schemata) und III (Kohomologie) aus dem Buch *Algebraic Geometry* von Hartshorne [14].

Definition 1.4.1.

(i) Sei X ein topologischer Raum. Eine *Garbe* $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X besteht aus folgenden Komponenten:

- für jede offene Menge $U \subseteq X$ aus einer abelschen Gruppe $\mathcal{F}(U)$, auch bezeichnet als $\Gamma(U, \mathcal{F})$, und
- für je zwei offene Mengen $V \subseteq U \subseteq X$ aus einem Homomorphismus abelscher Gruppen $\rho_{U,V}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, der so genannten *Restriktionsabbildung.*

Für diese muss gelten:

(a) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

(b) Für jedes offene $U \subseteq X$ ist $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ die Identität.

(c) Für offene Mengen $W \subseteq V \subseteq U \subseteq X$ gilt $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$.

(d) Für jede offene Menge $U \subseteq X$, jede offene Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ von U mit $V_i \subseteq U$ sowie jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ gilt

$$s = 0 \iff \forall\, i \in I: \ \rho_{U,V_i}(s) = 0 \ .$$

(e) Für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jede offene Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ von U mit $V_i \subseteq U$ gilt: Sind $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ so gewählt, dass für alle $i, j \in I$ gilt

$$\rho_{V_i, V_i \cap V_j}(s_i) = \rho_{V_j, V_i \cap V_j}(s_j) \ ,$$

so existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U,V_i}(s) = s_i$ für jedes $i \in I$.

Analog zu Garben von abelschen Gruppen lassen sich in offensichtlicher Weise auch Garben anderer algebraischer Strukturen definieren.

(ii) Ist $p \in X$ ein Punkt, so heißt der vermöge der Restriktionen gebildete direkte Limes

$$\mathcal{F}_p := \lim_{\substack{U \subseteq X \\ p \in U}} \mathcal{F}(U)$$

der *Halm* von $\mathcal{F}$ in p.

(iii) Der *Träger* $\sup \mathcal{F}$ einer Garbe ist die Menge der Punkte in X, in denen $\mathcal{F}$ einen von 0 verschiedenen Halm besitzt:

$$\sup \mathcal{F} = \{p \in X \,|\, \mathcal{F}_p \neq 0\} \ .$$

Auch hier wollen wir wieder geeignete Abbildungen zwischen den neu definierten Objekten betrachten.

Definition 1.4.2. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben über X, so besteht ein *Morphismus* $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ aus einer Familie von Morphismen $f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$, die mit den Restriktionsabbildungen auf $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ verträglich ist.

Eine der einfachsten Operationen auf Garben ist die Bildung der direkten Summe:

Definition 1.4.3. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben auf einem topologischen Raum X. Dann definiert die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ zusammen mit den Restriktionsabbildungen von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ eine weitere Garbe auf X, die *direkte Summe* $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$. Die n-fache direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}$ schreiben wir als $\mathcal{F}^n$.

Nicht alle Operationen auf Garben liefern wieder eine Garbe. Oft entsteht jedoch eine so genannte *Prägarbe*, der auf natürliche Weise eine Garbe zugeordnet werden kann. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von *Garbifizierung*. Für eine genaue Erklärung dieser Begriffe verweisen wir auf das Buch von Hartshorne [14, Chapter II.1].

Definition 1.4.4. Ist $f\colon X \to Y$ ein Morphismus topologischer Räume und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y, so bezeichnen wir mit $f^{-1}\mathcal{F}$ die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{F}(V)$, wobei wir wieder den direkten Limes meinen.

Ist speziell $X \subseteq Y$ eine Teilmenge mit der induzierten Topologie, und ist f die Einbettung, so nennen wir $f^{-1}\mathcal{F}$ die *Einschränkung* von $\mathcal{F}$ auf X und schreiben dafür auch $\mathcal{F}|_X$.

Definition 1.4.5. Ist $f\colon X \to Y$ ein Morphismus topologischer Räume und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so definieren wir die *Bildgarbe* $f_*\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ so, dass für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ gilt: $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

In diesem Zusammenhang wichtige topologische Räume sind lokal geringte Räume:

Definition 1.4.6. Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X, der so genannten *Strukturgarbe* von X, so dass alle Halme $\mathcal{O}_{X,p}, p \in X$ lokale Ringe sind.

Ein *Morphismus* $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal geringter Räume ist ein Paar $(f, f^\#)$ aus einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ und einem Morphismus $f^\#\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Garben auf Y, so dass für jeden Punkt $p \in X$ die induzierte Abbildung $f_p^\#\colon \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe ist. Für die Details dieser Definition verweisen wir auf Hartshorne [14, Chapter II.2].

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum, so ist eine Garbe $\mathcal{F}$ über X eine *Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln*, wenn jedes $\mathcal{F}(U), U \subseteq X$ offen, ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist und die Restriktionen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ mit den Modulstrukturen auf $\mathcal{O}_X(U)$ und $\mathcal{O}_X(V)$ kompatibel sind.

Bemerkung und Definition 1.4.7. Wichtige Beispiele für lokal geringte Räume sind Spektra von Ringen sowie die klassischen affinen und projektiven Varietäten:

- Ist R ein graduierter Ring, so bestehe die Menge $\operatorname{Proj} R$ aus den homogenen Primidealen in R, die $R_{\geq 1}$ nicht umfassen. Zur Definition einer Topologie auf $\operatorname{Proj} R$ wählen wir die Mengen der Form $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R \,|\, \mathfrak{p} \supseteq I\}$, wobei $I \subseteq R$ ein homogenes Ideal ist, als abgeschlossene Mengen. Damit wird $\operatorname{Proj} R$ zu einem topologischen Raum.

  Wir definieren wie folgt eine Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} R}$ auf $\operatorname{Proj} R$: Zu einem (homogenen) Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$ sei $R_{(\mathfrak{p})} = (S^{-1}R)_0$ der graduierte Anteil vom Grad 0 der Lokalisierung von R in S, wobei S aus den homogenen Elementen von $R \backslash \mathfrak{p}$ besteht. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \operatorname{Proj} R$ sei $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} R}(U)$ die Menge der Funktionen $s\colon U \to \dot{\bigcup}_{\mathfrak{p} \in U} R_{(\mathfrak{p})}$ von U in die disjunkte Vereinigung der $R_{(\mathfrak{p})}$, so dass $s(\mathfrak{p})$ für jedes $\mathfrak{p} \in U$ in

$R_{(\mathfrak{p})}$ liegt und s lokal als Bruch m/f homogener Elemente $m \in M$ und $f \in R$ vom gleichen Grad dargestellt werden kann. Die Restriktionsabbildungen ρ sind dabei die üblichen.

Das Paar $(\text{Proj } R, \mathcal{O}_{\text{Proj } R})$ ist dann ein lokal geringter Raum und heißt *projektives Spektrum* von R.

- Ist R ein Ring, so bestehe die Menge Spec R aus den Primidealen in R. Auch hier seien die abgeschlossenen Mengen die Mengen der Form $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \,|\, \mathfrak{p} \supseteq I\}$, wobei diesmal $I \subseteq R$ ein beliebiges Ideal ist.

  Definieren wir auch die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\text{Spec } R}$ wie oben, jedoch ohne die Homogenitätsbedingungen, so wird $(\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$ ebenfalls zu einem lokal geringten Raum, dem *affinen Spektrum* über R.

- Wenn wir über lokal geringte Räume sprechen, unterdrücken wir häufig die Angabe der Strukturgarbe und schreiben beispielsweise Proj R statt $(\text{Proj } R, \mathcal{O}_{\text{Proj } R})$.

- Affine und projektive Varietäten lassen sich als lokal geringte Räume auffassen. Ist beispielsweise $R = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$, so entsprechen die abgeschlossenen Punkte von Proj R homöomorph den Punkten von $\mathbb{P}^n$, die abgeschlossenen Punkte von Spec R den Punkten von $\Bbbk^{n+1}$.

Bemerkung 1.4.8. Ist $R = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$, so wird Proj R von den offenen, affinen Mengen $\{\mathfrak{p} \in \text{Proj } R \,|\, x_i \notin \mathfrak{p}\} \cong \text{Spec } R_{(x_i)}$ überdeckt.

Bemerkung und Definition 1.4.9. Die oben gesehene Konstruktion von Strukturgarben lässt sich wie folgt verallgemeinern:

- Ist R ein graduierter Ring und M ein graduierter R-Modul, so können wir aus M wie folgt eine Garbe $\widetilde{M}$ von $\mathcal{O}_{\text{Proj } R}$-Moduln auf Proj R konstruieren: Zu einem Primideal $\mathfrak{p} \in \text{Proj } R$ sei $M_{(\mathfrak{p})} = (S^{-1}M)_0$, wobei S aus den homogenen Elementen von $R \setminus \mathfrak{p}$ besteht. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \text{Proj } R$ sei $\widetilde{M}(U)$ die Menge der Funktionen $s\colon U \to \dot{\bigcup}_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$ von U in die disjunkte Vereinigung der $M_{(\mathfrak{p})}$, so dass $s(\mathfrak{p})$ für jedes $\mathfrak{p} \in U$ in $M_{(\mathfrak{p})}$ liegt und s lokal als Bruch m/f homogener Elemente $m \in M$ und $f \in R$ vom gleichen Grad dargestellt werden kann. Die Restriktionsabbildungen ρ sind dabei die üblichen.

  Dieselbe Konstruktion können wir auf Spec R durchführen, wobei wir auf die Homogenitätsbedingungen verzichten.

  In beiden Fällen nennen wir M einen *darstellenden Modul* von $\widetilde{M}$ und $\widetilde{M}$ die zu M *assoziierte Garbe*.

- Die einfachste nichttriviale Garbe, die so auf $X = \text{Proj } R$ konstruiert werden kann, ist $\widetilde{R}$, die Strukturgarbe von X. Wir schreiben $\mathcal{O}_X(i)$ für die Garbe $\widetilde{R(i)}$ und nennen $\mathcal{O}_X(1)$ *Serres Twistgarbe*.

Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist das *Tensorprodukt* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ die Garbifizierung von $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Wir schreiben $\mathcal{F}(i)$ für die Garbe $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(i)$.

- Sei X ein beliebiger lokal geringter Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt *frei*, wenn $\mathcal{F}$ isomorph ist zu $\mathcal{O}_X^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und *lokal frei*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X gibt, so dass jedes $\mathcal{F}|_{U_i}$ ein freier $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modul ist.

  Existiert dagegen eine offene, affine Überdeckung $\{U_i = \operatorname{Spec} R_i\}_{i \in I}$ von X, so dass jede Einschränkung $\mathcal{F}|_{U_i}$ zu einem endlich erzeugten R_i-Modul assoziiert ist, dann heißt $\mathcal{F}$ *kohärent*.

Wir können jedoch nicht nur graduierten Moduln eine Garbe auf $\mathbb{P}^n$ zuordnen, sondern auch den umgekehrten Weg gehen.

Definition 1.4.10. Sei $X = \mathbb{P}^n$ und $\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Der Garbe $\mathcal{F}$ ist in natürlicher Weise ein graduierter R-Modul zugeordnet. Als Gruppe ist dies

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(i)) \ .$$

Ist $r \in R_d$ ein Element vom Grad d, so entspricht diesem ein Element s von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$. Ist $m \in \Gamma(X, \mathcal{F}(i))$, so sei $r \cdot m$ das Bild von $s \otimes m$ unter dem Isomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{F}(i)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) = \Gamma(X, \mathcal{F}(d+i))$. Vermöge dieser Abbildung wird $\Gamma_*(\mathcal{F})$ ein graduierter R-Modul, der zu $\mathcal{F}$ *assoziierte Modul*.

Alle bei uns vorkommenden Garben werden kohärent sein. Beispielsweise sind Strukturgarben immer kohärent. Daher besitzen sie die folgenden Eigenschaften:

Satz 1.4.11. *Ist $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf einer projektiven Varietät X, so ist $\widetilde{\Gamma_* \mathcal{F}}$ auf natürliche Weise isomorph zu $\mathcal{F}$.*

Satz 1.4.12. *Ist $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf einer projektiven Varietät X, so existiert für je zwei darstellende Moduln M und N von $\mathcal{F}$ eine natürliche Zahl $d_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich M und N nur in Graden $< d_0$ unterscheiden.*

Definition 1.4.13. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus projektiver Varietäten und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Dann definieren wir die *Urbildgarbe $f^*\mathcal{G}$* von $\mathcal{G}$ als $f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$.

Es gelten folgende Identitäten für Bilder und Urbilder kohärenter Garben:

Satz 1.4.14. *Seien R und S Ringe, $\varphi\colon S \to R$ ein Ringhomomorphismus und $f\colon \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} S$ der von φ induzierte Morphismus.*

(i) Für jeden R-Modul M gilt $f_*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{{}_S M}$. Dabei bedeutet ${}_S M$, dass wir M vermöge f als S-Modul auffassen.

(ii) Für jeden S-Modul N gilt $f^*(\widetilde{N}) \cong (N \otimes_S R)^\sim$, wobei wir R vermöge f als S-Modul auffassen.

Über beliebigen Räumen gelten diese einfachen Zusammenhänge nicht mehr. Wenn wir einige Einschränkungen machen, können wir jedoch wenigstens gewährleisten, dass kohärente Garben auf kohärente Garben abgebildet werden:

Satz 1.4.15. *Ist $f\colon X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung zwischen projektiven Varietäten und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X, so ist $f_*\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf Y.*

Garbenkohomologie

Abschließend wollen wir noch einen kurzen Blick auf die Kohomologiegruppen von Garben werfen.

Definition 1.4.16. Sei X ein topologischer Raum. Der Funktor $\Gamma(X, \cdot)$ ist linksexakt, und die rechtsabgeleiteten Funktoren von $\Gamma(X, \cdot)$ heißen *Kohomologiefunktoren* $\mathbf{H}^j(\cdot)$. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so heißen die Gruppen $\mathbf{H}^j(\mathcal{F})$ *(globale) Kohomologiegruppen* von F.

Die Berechnung der Kohomologiegruppen einer Garbe erfolgt jedoch meist nicht auf diesem Weg, sondern verwendet alternative Definitionen wie die der Čech-Kohomologie, die beispielsweise Serre gebraucht [17].

Dies ist für uns jedoch weniger interessant als einige elementare Eigenschaften der Kohomologiegruppen.

Satz 1.4.17. *Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n$.*

(i) Die Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ sind endlichdimensionale $\Bbbk$-Vektorräume.

(ii) Ist $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Untervarietät von $\mathbb{P}^n$, und gilt $\mathcal{F} = 0$ außerhalb von Y, so ist die induzierte Abbildung

$$\mathbf{H}^j(\mathcal{F}) \to \mathbf{H}^j(\mathcal{F}|_Y)$$

bijektiv für alle $j \geq 0$.

(iii) Ist $j > \dim(\mathcal{F})$, so gilt $H^j(\mathcal{F}) = 0$.

Die letzte Aussage gibt uns Informationen darüber, dass die meisten Kohomologiegruppen einer Garbe 0 sind. Solche Verschwindungs– oder Identitätssätze ersparen in der Praxis viel Rechenarbeit, weshalb wir hier einige weitere zusammenstellen, die im späteren Verlauf noch verwendet werden.

Satz 1.4.18. *Sei $n \geq 1$, und seien $x_0, \ldots, x_n$ die homogenen Koordinaten von $\mathbb{P}^n$. Dann gilt:*

(i) $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)) \cong \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]_i$ *für alle* $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\mathbf{H}^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)) = 0$ *für alle* $0 < j < n$, $i \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\mathbf{H}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \cong \Bbbk$.

(iv) Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ *ist die natürliche Abbildung*

$$\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)) \times \mathbf{H}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i-n-1)) \to \mathbf{H}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) \cong \Bbbk$$

eine perfekte Paarung. Insbesondere besitzen die beiden $\Bbbk$*-Vektorräume* $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}(i))$ *und* $\mathbf{H}^n(\mathcal{O}(-n-i-1))$ *dieselbe Dimension.*

Lokale Kohomologie

Lediglich an einer Stelle im Beweis von Satz 2.3.1 werden wir die lokale Kohomologie eines Moduls benötigen. Daher geben wir hier nur einen ganz kurzen Überblick über die Definition und die wenigen verwendeten Eigenschaften. Weitere Informationen finden sich beispielsweise bei Grothendieck. Seine Vorlesung zur lokalen Kohomologie wurde von Hartshorne veröffentlicht [13].

Bemerkung und Definition 1.4.19. Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Wir definieren den nullten *lokalen Kohomologiemodul* $\mathbf{H}^0_I(M)$ von M mit Träger in I als die Menge aller Elemente von M, die von einer Potenz von I annulliert werden. Die höheren lokalen Kohomologiemoduln sind die rechtsabgeleiteten Funktoren des linksexakten Funktors $\mathbf{H}^0_I(\cdot)$. Das heißt, gegeben eine injektive Auflösung $C^\bullet$ von M, ist $\mathbf{H}^j_I(M)$ der j-te Kohomologiemodul von $\mathbf{H}^0_I(C^\bullet)$.
Äquivalent ist die Definition

$$\mathbf{H}^j_I(M) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{Ext}^j_R(R/I^n, M) \ .$$

Satz 1.4.20. *Sind* $R = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$, $\mathfrak{m} = R_{\geq 1}$ *das maximale homogene Ideal in* R, M *ein graduierter* R*-Modul und* $\widetilde{M}$ *die durch* M *definierte Garbe auf* $\mathbb{P}^n$, *so existieren eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^0(\widetilde{M}(i)) \longrightarrow \mathbf{H}^1_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$$

und für jedes $j > 0$ *ein kanonischer Isomorphismus*

$$\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^j(\widetilde{M}(i)) = \mathbf{H}^{j+1}_{\mathfrak{m}}(M) \ .$$

1.5 Die Veronese–Einbettung

Nachdem wir uns nun mit Garben und mit Abbildungen zwischen Garben im Allgemeinen befasst haben, wollen wir uns im Weiteren auf eine spezielle Abbildung konzentrieren. Graderhaltende Abbildungen zwischen den Koordinatenringen projektiver Varietäten induzieren auf diesen Abbildungen, auf Garbenniveau im Wesentlichen die Identitätsabbildung sind (vgl. [14, Proposition II.5.12]), weshalb wir uns um einen interessanteren Fall kümmern wollen.

Einige der einfachsten, aber trotzdem auf Garbenniveau interessanten Abbildungen bilden die Familie der so genannten Veronese–Einbettungen oder d-upel–Einbettungen.

Definition 1.5.1. Seien $n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $M_0, \ldots, M_N$ die Monome vom Grad d in den homogenen Variablen $x_0, \ldots, x_n$ des $\mathbb{P}^n$, also $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Die Abbildung $v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, die mit Hilfe des Einsetzungshomomorphismus durch

$$v_d(a_0 : \ldots : a_n) := (M_0(a_0, \ldots, a_n) : \ldots : M_N(a_0, \ldots, a_n))$$

definiert ist, heißt *d-te Veronese–Einbettung* oder *d-upel–Einbettung* des $\mathbb{P}^n$. Das Bild der Veronese–Einbettung heißt *Veronese–Varietät*, das Bild $v_d(\mathbb{P}^1)$ genauer *rationale Normkurve vom Grad d.*

Bemerkung 1.5.2. Die Veronese–Einbettungen sind regulär, weil das Bild eines Punktes $(a_0 : \ldots : a_n)$ die Komponenten a_i^d enthält und diese nur dann simultan verschwinden, wenn alle $a_i = 0$ sind.

Das Bild jeder Veronese–Abbildung lässt sich durch einfache quadratische Gleichungen beschreiben:

Satz 1.5.3. *Seien $\left\{y_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1},\ |\alpha| = d\right\}$ die homogenen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{P}^N$. Dann ist das Bild $v_d(\mathbb{P}^n)$ die durch die Gleichungen*

$$y_\alpha y_\beta = y_{\alpha'} y_{\beta'} \quad \text{für } \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \tag{1.1}$$

definierte Untervarietät von $\mathbb{P}^N$.

Beweis. Nach Konstruktion gelten auf dem Bild $v_d(\mathbb{P}^n)$ die Relationen 1.1.

Erfüllt umgekehrt ein Punkt $p \in \mathbb{P}^N$ mit Koordinaten p_α diese Relationen, so liegt p bereits im Bild von v_d. In der Tat muss mindestens eine der Koordinaten von p von Null verschieden sein, etwa $p_{(i_0,\ldots,i_n)}$, $i_0 \neq 0$.

Ist $i_0 = d$, so ist $(p_{(d,0,\ldots,0)} : p_{(d-1,1,0\ldots,0)} : \ldots : p_{(d-1,0\ldots,0,1)})$ ein Punkt des $\mathbb{P}^n$ mit Bild p. Andernfalls existiert ein weiterer, von 0 verschiedener, Index j mit $i_j \neq 0$, etwa $i_1 \neq 0$. Dann folgt aus

$$0 \neq p^2_{(i_0,\ldots,i_n)} = p_{(i_0+1,i_1-1,i_2,\ldots,i_n)} p_{(i_0-1,i_1+1,i_2,\ldots,i_n)}$$

schon $p_{(i_0+1,i_1-1,\dots,i_n)} \neq 0$, also induktiv $p_{(d,0,\dots,0)} \neq 0$. Daher ist das Bild $\mathrm{im}(v_d) \subseteq \mathbb{P}^N$ genau die durch die Gleichungen (1.1) definierte projektive Varietät. $\square$

Seien im Folgenden R und S die homogenen Koordinatenringe von $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{P}^N$, d.h. seien $R = \Bbbk[x_0, \dots, x_n]$ und $S = \Bbbk[\{y_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = d\}]$. Außerdem sei $I \subseteq S$ das von den Relationen (1.1) erzeugte Ideal.

Bemerkung 1.5.4 (Koordinatenfreie Darstellung). Die Veronese–Einbettung $v_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ induziert auf Ebene der Koordinatenringe den Einsetzungshomomorphismus

$$v_d^\#\colon S \to R;\ y_\alpha \mapsto x^\alpha\ .$$

Bzgl. der Koordinatenringe von $\mathbb{P}^n$ und $v_d\mathbb{P}^n$ hat die Veronese–Einbettung sogar eine noch einfachere Gestalt:

Die Abbildung $v_d^\#$ hat den Kern $\ker(v_d^\#) = I$ und das Bild $\mathrm{im}(v_d^\#) = \bigoplus_i R_{di} =: R^{(d)}$ und liefert daher einen Isomorphismus $S/I \xrightarrow{\sim} R^{(d)}$. Die induzierte Abbildung

$$S/I \to R;\ \overline{y_\alpha} \mapsto x^\alpha$$

bzw.

$$R^{(d)} \to R;\ x^\alpha \mapsto x^\alpha$$

wiederum entspricht, da S/I der homogene Koordinatenring von $v_d\mathbb{P}^n$ ist, gerade der Einschränkung

$$v_d\colon \mathbb{P}^n \to v_d\mathbb{P}^n$$

von v_d.

Satz 1.5.5. *Die Einbettung $v_d\colon \mathbb{P}^n \to v_d\mathbb{P}^n$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir konstruieren Umkehrabbildungen $\varphi_i\colon V_i \to U_i$ auf den Elementen der affinen Überdeckungen $U_i = \{p \in \mathbb{P}^n \mid p_i \neq 0\}$ von $\mathbb{P}^n$ und $V_i = v_d(U_i) = \left\{p \in v_d\mathbb{P}^n \mid p_{\alpha(i)} \neq 0\right\}$ von $v_d\mathbb{P}^n$. Dabei sei $\alpha(i)$, der Multiindex mit $\alpha(i)_i = d$ und $\alpha(i)_j = 0$ für $j \neq i$.

Ist $\alpha(i,j)$, $j \neq i$, der Multiindex mit

$$\alpha(i,j)_k = \begin{cases} d-1 & \text{für } k = i \\ 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $\alpha(i,i) = \alpha(i)$, so bilden wir einen Punkt $p \in V_i$ ab auf den Punkt

$$\varphi_i(p) := \left(\frac{p_{\alpha(i,0)}}{p_{\alpha(i)}} : \ldots : \frac{p_{\alpha(i,n)}}{p_{\alpha(i)}}\right)\ .$$

Die so konstruierte Abbildung ist invers zu $v_d|_{U_i}$.

Da für einen Punkt $p \in V_i \cap V_j$ gilt $p^d_{\alpha(i,j)} = p_{\alpha(j)} p^{d-1}_{\alpha(i)}$, also insbesondere $p_{\alpha(i,j)} \neq 0$, und da p außerdem die Relationen (1.1) erfüllt, folgt

$$\left(\frac{p_{\alpha(i,0)}}{p_{\alpha(i)}}, \ldots, \frac{p_{\alpha(i,n)}}{p_{\alpha(i)}}\right) = \frac{p_{\alpha(j)}}{p_{\alpha(i,j)}} \cdot \left(\frac{p_{\alpha(j,0)}}{p_{\alpha(j)}}, \ldots, \frac{p_{\alpha(j,n)}}{p_{\alpha(j)}}\right) .$$

Also stimmen φ_i und φ_j auf $V_i \cap V_j \to U_i \cap U_j$ überein.

Durch Verkleben erhalten wir eine zu v_d inverse Abbildung. $\square$

Lemma 1.5.6. *Vermöge $v_* = (v_d)_*$ entsprechen sich $\mathcal{O}_{v_d\mathbb{P}^n}(i)$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i{\cdot}d)$, $i \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Auf den $\mathbb{P}^n$ überdeckenden affinen Räumen U_j (vgl. 1.5.5) mit Koordinatenringen $R_{(x_j)}$ und den $v_d\mathbb{P}^n$ überdeckenden affinen Räumen V_j mit Koordinatenringen $(S/I)_{(y_{\alpha(j)})} \cong R^{(d)}_{(x_j^d)}$ gilt

$$\begin{aligned} v_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i \cdot d)|_{U_j}) &= v_*(R(i \cdot d)_{(x_j)})^\sim \\ &\cong (R(i \cdot d)_{(x_j)} \text{ aufgefasst als } R^{(d)}_{(x_j^d)}\text{-Modul})^\sim \\ &= (R^{(d)}(i)_{(x_j^d)})^\sim = \mathcal{O}_{v_d\mathbb{P}^n}(i)|_{U_j} \end{aligned}$$

Durch Verkleben folgt die Behauptung. $\square$

Satz 1.5.7. *Durch v_d werden kohärente Garben über $\mathbb{P}^n$ auf kohärente Garben über $\mathbb{P}^N$ abgebildet.*

Beweis. Nach Satz 1.4.15 bildet v_d: $\mathbb{P}^n \to v_d\mathbb{P}^n$ kohärente Garben über $\mathbb{P}^n$ auf kohärente Garben über $v_d\mathbb{P}^n$ ab. Die analoge Aussage gilt für die kanonische Einbettung ι: $v_d\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ und somit auch für v_d: $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$. $\square$

Bemerkung 1.5.8. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe über $v_d\mathbb{P}^n$ und $j \geq 0$, so existiert ein Isomorphismus

$$\mathbf{H}^j(v_d\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \cong \mathbf{H}^j(\mathbb{P}^N, \iota_*\mathcal{F}) .$$

Von dieser Identität werden wir später ausgiebigen Gebrauch machen, da sie es uns erlaubt, bei der Betrachtung von Kohomologiegruppen das Bild einer Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^n$ unter v_d wahlweise als Garbe auf $v_d\mathbb{P}^n$ oder als Garbe auf $\mathbb{P}^N$ anzusehen.

Kapitel 2

Tate–Auflösungen

Nachdem wir nun die allgemeinen Grundlagen gelegt haben, können wir uns dem eigentlichen Objekt unseres Interesses zuwenden: Den Tate–Auflösungen von Garben.

Sie wurden erstmals 1984 von S. I. Gel′fand eingeführt [11]. Zu ihrer Konstruktion verwendete er Ideen von Bernšteĭn, Gel′fand und Gel′fand (BGG), die im Jahr 1978 beschrieben worden waren [2]. Die von BGG entwickelte Korrespondenz basiert auf der Konstruktion zweier adjungierter Funktoren **R** und **L**, die eine Äquivalenz zwischen bestimmten abgeleiteten Kategorien definieren. Diese Funktoren sind der Ausgangspunkt für Gel′fands explizite Version, die Tate–Auflösungen. Ihre Gestalt wurde von Eisenbud, Fløystad und Schreyer [5] in einer Weise angegeben, die unter anderem eine neue Möglichkeit zur Berechnung der Kohomologie von Garben ermöglicht.

Wir geben zunächst einen Überblick über die BGG–Korrespondenz und verzichten dabei auf die ursprünglich verwendete Sprechweise abgeleiteter Kategorien. Wir folgen dann den Ideen von Eisenbud, Fløystad und Schreyer zur Definition der Tate–Auflösung einer Garbe sowie zur Analyse von deren Eigenschaften. Zum Schluss werden wir die vorangegangenen Überlegungen an einigen Beispielen illustrieren.

Im gesamten Kapitel verwenden wir folgende Notation:

Seien V ein $(n+1)$-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum mit Basis $\{e_0, \ldots, e_n\}$, W der zu V duale Vektorraum mit zu $\{e_0, \ldots, e_n\}$ dualer Basis $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Weiter seien $S = \mathrm{Sym}(W)$ die symmetrische Algebra über W und $E = \Lambda V$ die äußere Algebra über V. Wir graduieren S und E so, dass Elemente von W den Grad 1 und Elemente von V den Grad -1 erhalten. Weiter setzen wir $\omega_E := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk) \cong E \otimes \Lambda^{n+1} W$ (vgl. Satz 1.1.12), was nach Basiswahl isomorph zu $E(-n-1)$ ist.

2.1 Die BGG–Korrespondenz

Die Bernšteĭn–Gel′fand–Gel′fand–Korrespondenz wurde in [2] als eine Äquivalenz der abgeleiteten Kategorie beschränkter Komplexe endlich erzeugter, freier, graduierter S–Moduln und der abgeleiteten Kategorie beschränkter Komplexe endlich erzeugter, freier, graduierter E–Moduln vorgestellt. Gleichzeitig entdeckte Beĭlinson eine alternative Beschreibung dieser Äquivalenz [1]. Beide Artikel bauten auf einer Vorlesung Manins auf.

Doch die Formulierung in der Sprache abgeleiteter Kategorien hatte den Nachteil, dass die Beweise vergleichsweise kompliziert wurden. Wir stellen die BGG-Korrespondenz hier basierend auf den Ideen in [5] und ohne die Verwendung abgeleiteter Kategorien vor.

Dazu definieren wir zunächst die der Korrespondenz zugrunde liegenden Funktoren $\mathbf{R}$ und $\mathbf{L}$.

Definition 2.1.1. Sei $M = \bigoplus_d M_d$ ein graduierter S-Modul. Wir definieren $\mathbf{R}(M)$ als den Komplex

$$\mathbf{R}(M): \ \cdots \longrightarrow F^{d-1} \xrightarrow{\varphi^{d-1}} F^d \xrightarrow{\varphi^d} F^{d+1} \longrightarrow \cdots$$

mit Termen

$$F^d = \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, M_d)$$

und Differenzialen

$$\varphi^d(\alpha) = \left(e \mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i \alpha(e_i \wedge e)\right) .$$

Bemerkung 2.1.2. $\mathbf{R}(M)$ ist in der Tat ein Komplex, denn an jeder Stelle der Sequenz gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi(\alpha)) &= e \mapsto \sum_i x_i \cdot (\varphi \circ \alpha)(e_i \wedge e) \\
&= e \mapsto \sum_{i,j} x_i x_j \cdot \alpha(e_j \wedge e_i \wedge e) \\
&= e \mapsto \sum_{i<j} x_i x_j \cdot \alpha(e_j \wedge e_i \wedge e) + \sum_{i>j} x_i x_j \cdot \alpha(e_j \wedge e_i \wedge e) \\
&= e \mapsto \sum_{i<j} x_i x_j \cdot \alpha(e_j \wedge e_i \wedge e) + \sum_{i<j} x_j x_i \cdot \alpha(e_i \wedge e_j \wedge e) \\
&= e \mapsto \sum_{i<j} x_i x_j \cdot \alpha(e_j \wedge e_i \wedge e) + \sum_{i<j} x_i x_j \cdot (-\alpha(e_j \wedge e_i \wedge e)) \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.3. Da $\omega_E \cong E \otimes \Lambda^{n+1} W$ ist und nach Satz 1.1.4 die Identitäten $\operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(E, M_d) = \omega_E \otimes M_d$ gelten, lässt sich $\mathbf{R}(M)$ schreiben als

$$\mathbf{R}(M): \ \cdots \longrightarrow \omega_E \otimes M_d \xrightarrow{\varphi} \omega_E \otimes M_{d+1} \longrightarrow \cdots$$

mit Differenzialen

$$\varphi((e \otimes w) \otimes m) = \sum_{i=0}^{n} ((e_i \wedge e) \otimes w) \otimes (x_i \cdot m)$$

bzw.

$$\varphi(e \otimes m) = \sum_{i=0}^{n} (e_i \wedge e) \otimes (x_i \cdot m) \ .$$

Die Abbildung φ ist durch ihre Einschränkung auf $E_0 \otimes M_d = M_d$ eindeutig bestimmt, und das Bild $\varphi(E_0 \otimes M_d)$ liegt in $E_1 \otimes M_{d+1}$. Wir können φ daher ebensogut als Abbildung $M_d \to V \otimes M_{d+1}$ auffassen. Damit ergibt sich sofort:

Korollar 2.1.4. *Ist M ein S-Modul und μ: $S \otimes M \to M$ die Multiplikationsabbildung auf M, dann sind die Differenziale φ: $M_d \to V \otimes M_{d+1}$ von $\mathbf{R}(M)$ adjungiert zu μ: $W \otimes M_d \to M_{d+1}$.*

Wir haben gesehen, dass $\mathbf{R}$ jedem graduierten S-Modul einen linearen Komplex freier E-Moduln zuweist. Nun werden wir zeigen, dass umgekehrt auch jeder lineare Komplex von freien E-Moduln einen graduierten S-Modul definiert.

Satz 2.1.5. *Die Abbildung $\mathbf{R}$ ist eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der graduierten S-Moduln und der Kategorie der linearen Komplexe von freien E-Moduln.*

Beweis. Sicher ist, gegeben einen S-Modul M, $\mathbf{R}(M)$ ein linearer Komplex von freien E-Moduln.

Seien umgekehrt eine Folge von $\mathbb{k}$-Vektorräumen M_d, $d \in \mathbb{Z}$, und Abbildungen φ: $\omega_E \otimes M_d \to \omega_E \otimes M_{d+1}$ gegeben, so dass

$$C^\bullet: \ \cdots \longrightarrow \omega_E \otimes M_d \xrightarrow{\varphi} \omega_E \otimes M_{d+1} \longrightarrow \cdots$$

ein linearer, freier Komplex von E-Moduln ist. Wir konstruieren nun eine S-Modul-Struktur auf $M = \bigoplus_d M_d$, vermöge derer $\mathbf{R}(M) = C^\bullet$ gilt.
Da $C^\bullet$ linear ist, gilt $\varphi(1 \otimes m) \in V \otimes M_{d+1}$ für alle $m \in M_d$. Die Multiplikation auf M definieren wir durch die zu $\varphi|_{E_0 \otimes M_d}$: $M_d \to V \otimes M_{d+1}$ adjungierten Abbildungen μ: $W \otimes M_d \to M_{d+1}$. Nun bleibt zu zeigen, dass M mit dieser Multiplikation wirklich ein S-Modul wird, und dass $\mathbf{R}(M)$ der Komplex $C^\bullet$ ist.

Beginnen wir mit der Modulstruktur von M. Um eine solche zu erhalten, benötigen wir die Assoziativität und Kommutativität von μ. Diese Eigenschaften sind äquivalent dazu, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \otimes W \otimes M_d \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu"] \arrow[dr, "s\otimes\mathrm{id}"'] & W \otimes M_{d+1} \arrow[r, "\mu"] & M_{d+2} \\ & \mathrm{Sym}_2 W \otimes M_d \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei sei s das zweite Differenzial des Komplexes

$$0 \longrightarrow \Lambda^2(W) \xrightarrow{\Delta} W \otimes W \xrightarrow{s} \mathrm{Sym}_2(W) \longrightarrow 0$$

aus Lemma 1.1.11 und Beispiel 1.2.5. Aufgrund der Exaktheit dieses Komplexes bedeutet ein Kommutieren des Diagramms gerade, dass die induzierte Abbildung

$$\Lambda^2 W \otimes M_d \xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}} W \otimes W \otimes M_d \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mu} W \otimes M_{d+1} \xrightarrow{\mu} M_{d+2}$$

die Nullabbildung ist. Dies ist der Fall, da diese Abbildung adjungiert ist zu

$$M_d \xrightarrow{\varphi} V \otimes M_{d+1} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varphi} V \otimes V \otimes M_{d+2} \xrightarrow{\Delta^*\otimes\mathrm{id}} \Lambda^2 V \otimes M_{d+2}\ ,$$

was wegen $\varphi \circ \varphi = 0$ selbst schon die Nullabbildung ist. Also ist M vermöge μ ein S-Modul.

Um zu zeigen, dass für den so konstruierten Modul M wirklich $\mathbf{R}(M)$ isomorph zu $C^\bullet$ ist, schreiben wir den Komplex $\mathbf{R}(M)$ in der Notation von 2.1.3 als

$$\mathbf{R}(M): \ \cdots \longrightarrow \omega_E \otimes M_d \xrightarrow{\psi} \omega_E \otimes M_{d+1} \longrightarrow \cdots$$

mit Differenzialen

$$\psi(1 \otimes m) = \sum_i e_i \otimes \mu(x_i, m)\ .$$

Damit ist ψ adjungiert zu μ, also aufgrund der Eindeutigkeit der Adjungierten gleich φ.

Schließlich müssen wir noch zeigen, dass für je zwei graduierte S-Moduln M und N gilt $\mathrm{Hom}(M,N) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{R}(M), \mathbf{R}(N))$. Dies ist jedoch klar, da die Homomorphismen von Komplexen graduierter Moduln $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}(M), \mathbf{R}(N))$ nach Definition 1.2.3 gerade Folgen von Homomorphismen $M_i \to N_i$ sind, die mit der Multiplikation auf M und N verträglich sind. Das sind genau die graduierten Morphismen $M \to N$. □

Satz 2.1.6. *Der Komplex* $\mathbf{R}(M_{\geq d})$ *ist genau dann azyklisch, wenn* $M_{\geq d}$ *ein d-regulärer Modul ist.*

Der Beweis verwendet die von uns nicht eingeführten, abgeleiteten Funktoren Ext und Tor. Den damit vertrauten Leser verweisen wir auf [5], wo dieser Satz als Korollar 2.4 auftaucht.

Wir wollen $\mathbf{R}$ nun auf Komplexen von graduierten S-Moduln definieren. Dazu betrachten wir den Basisfall eines Komplexes mit nur einem von 0 verschiedenen Term M. In diesem Fall definieren wir das Bild des Komplexes unter $\mathbf{R}$ direkt über $\mathbf{R}(M)$. Bei einem allgemeinen Komplex wenden wir $\mathbf{R}$ auf jeden einzelnen Term an und verschmelzen die entstehenden Komplexe geeignet.

Definition 2.1.7. Sei $M^\bullet$ ein Komplex graduierter S-Moduln. Ist M im kohomologischen Grad i konzentriert, so definieren wir

$$\mathbf{R}(M^\bullet) := \mathbf{R}(M^i)[-i] \ .$$

Allgemein wenden wir $\mathbf{R}$ auf jeden Term M^i an, wobei wir M^i als einen im Grad i konzentrierten Komplex betrachten. So entsteht ein *Doppelkomplex*:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E,(M^{i+1})_j) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E,(M^{i+1})_{j+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E,(M^{i})_j) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E,(M^{i})_{j+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die horizontalen Komplexe die $\mathbf{R}(M^i)$. Die vertikalen Abbildungen kommen von den Differenzialen von $M^\bullet$. Wir definieren $\mathbf{R}(M^\bullet)$ als den totalen Komplex dieses Doppelkomplexes. Das heißt, die Terme von $\mathbf{R}(M^\bullet)$ sind

$$\mathbf{R}(M^\bullet)^k = \bigoplus_{i+j=k} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E,(M^i)_j) \ ,$$

oder, wenn wir die Graduierung mit einbeziehen,

$$\mathbf{R}(M^\bullet)^k_i = \bigoplus_{j} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E_{j-i},(M^{k-j})_j) \ ,$$

und die Differenziale lassen sich direkt aus dem Doppelkomplex ablesen.

Der zweite von Bernšteĭn, Gel′fand und Gel′fand konstruierte Funktor ist ähnlich definiert, allerdings mit vertauschten Rollen von E und S. Wie bei $\mathbf{R}$ dehnen wir auch die Definition dieses Funktors auf Komplexe aus.

Definition 2.1.8. Sei $P = \bigoplus_d P_d$ ein graduierter E-Modul. Wir definieren $\mathbf{L}(P)$ als den Komplex

$$\mathbf{L}(P) : \cdots \longrightarrow S \otimes_{\Bbbk} P_{d+1} \xrightarrow{\varphi^{-d-1}} S \otimes_{\Bbbk} P_d \xrightarrow{\varphi^{-d}} S \otimes_{\Bbbk} P_{d-1} \longrightarrow \cdots$$

mit Differenzialen

$$\varphi^d(s \otimes p) = \sum_{i=0}^{n} (x_i \cdot s) \otimes (e_i \wedge p) \ .$$

Dabei sei $S \otimes_{\Bbbk} P_d$ der Term vom kohomologischen Grad $-d$.

Ist $P^\bullet$ ein Komplex graduierter E-Moduln, so erhalten wir durch Anwenden von $\mathbf{L}$ auf die einzelnen Terme einen Doppelkomplex, dessen totaler Komplex $\mathbf{L}(P^\bullet)$ ist. Es gilt also

$$\mathbf{L}(P^\bullet)^k = \bigoplus_{i-j=k} S \otimes_{\Bbbk} (P^i)_j \ ,$$

bzw.

$$\mathbf{L}(P^\bullet)^k_i = \bigoplus_j S_{i-j} \otimes_{\Bbbk} (P^{k+j})_j \ .$$

Satz 2.1.9. *Die Abbildung* $\mathbf{L}$ *ist eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der graduierten* E*-Moduln und der Kategorie der linearen Komplexe von freien* S*-Moduln.*

Diese Aussage und ihr Beweis sind sehr ähnlich zu Satz 2.1.5. Stellen wir die Definitionen von $\mathbf{R}(M^\bullet)$ und $\mathbf{L}(P^\bullet)$ gegenüber, so drängt sich sogar der Verdacht auf, dass $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ adjungiert sind. Dies ist in der Tat der Fall.

Satz 2.1.10 (Bernšteĭn, Gel′fand und Gel′fand). *Der Funktor* $\mathbf{L}$ *(zwischen der Kategorie der Komplexe graduierter* E*-Moduln und der Kategorie der Komplexe graduierter* S*-Moduln) ist linksadjungiert zu* $\mathbf{R}$.

Beweis. Ist M ein graduierter S-Modul und P ein graduierter E-Modul, so gilt

$$\mathrm{Hom}_S(S \otimes_{\Bbbk} P, M) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P, M) = \mathrm{Hom}_E(P, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, M)) \ .$$

Sind allgemein $M^\bullet$ ein Komplex graduierter S-Moduln und $P^\bullet$ ein Komplex graduierter E-Moduln, so müssen wir zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}_S(\mathbf{L}(P^\bullet), M^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_E(P^\bullet, \mathbf{R}(M^\bullet)) \qquad (2.1)$$

gilt. Zur Erinnerung: Homomorphismen zwischen Komplexen müssen inneren und kohomologischen Grad respektieren und mit den Differenzialen kommutieren.

Wir haben oben gesehen, dass für die bigraduierten Moduln $\mathbf{L}(P^\bullet)$ und $\mathbf{R}(M^\bullet)$ gerade

$$\mathbf{L}(P^\bullet) = \bigoplus_{i,j} S \otimes_{\Bbbk} (P^i)_j$$

und

$$\mathbf{R}(M^\bullet) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, (M^i)_j)$$

gilt. Daher entsprechen die Homomorphismen auf beiden Seiten von (2.1) genau denjenigen Homomorphismen bigraduierter Moduln

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P^\bullet, M^\bullet)$$

mit $\varphi(P^i_j) \subseteq M^i_j$ und $\varphi d - d\varphi = (\sum_k x_k \otimes e_k)\varphi$, wobei $(\sum_k x_k \otimes e_k)\varphi$ ein Element $p \in P^i_j$ auf $(-1)^i \sum_k x_k \varphi(e_s \wedge p)$ abbildet. □

2.2 Die Tate–Auflösung einer Garbe

Nach dieser Vorarbeit können wir nun mit der Betrachtung von Tate–Auflösungen beginnen. Diese Auflösungen stehen in einer natürlichen Beziehung zu Garben auf $\mathbb{P}(W)$, die es uns erlaubt, jeder kohärenten Garbe auf $\mathbb{P}(W)$ funktoriell eine Tate–Auflösung zuzuordnen.

Definition 2.2.1. Eine *Tate–Auflösung* über E ist ein exakter Komplex

$$T^\bullet : \quad \cdots \to T^{i-1} \to T^i \to T^{i+1} \to \cdots$$

freier E-Moduln.

Bemerkung und Definition 2.2.2. Einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ über $\mathbb{P}(W)$ lässt sich auf natürliche Weise eine Tate–Auflösung zuordnen. Sei dazu M ein endlich erzeugter, graduierter S-Modul, der $\mathcal{F}$ darstellt, etwa der Modul

$$M = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i))$$

aus Definition 1.4.10. Der Komplex $\mathbf{R}(M_{\geq \mathrm{reg}(M)})$ ist minimal und nach 2.1.6 azyklisch. Wir wählen $d > \mathrm{reg}(M)$ und schalten vor $\mathbf{R}(M_{\geq d})$ eine minimale, freie Auflösung von

$$\ker(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, M_{d+1}) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, M_{d+2}))\ .$$

Die Konstruktion einer solchen freien Auflösung haben wir in Kapitel 1.2 vorgestellt. Der entstehende Komplex hat die Form

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow T^{d-2} \longrightarrow T^{d-1} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(d))) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E, \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(d+1))) \longrightarrow \cdots\ . \end{aligned}$$

Er ist exakt und frei, also eine Tate–Auflösung. Diese wählen wir als Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$.

Bemerkung 2.2.3. Bei der Definition der Tate–Auflösung einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ haben wir an zwei Stellen willkürliche Entscheidungen getroffen: Bei der Wahl eines repräsentierenden Moduls M und bei der Wahl von d. Daher müssen wir uns noch Gedanken über die Unabhängigkeit der Definition von M und d machen.

Für festes M erhalten wir einen minimalen Komplex, denn:

- Wegen $d \geq \operatorname{reg}(M)$ ist $\mathbf{R}(M_{\geq d})$ eine minimale injektive Auflösung.
- Die ergänzende freie Auflösung ist minimal gewählt.
- Da d sogar echt größer als $\operatorname{reg}(M)$ ist, wird der Kern der Abbildung $(\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, M_{d+1}) \to \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, M_{d+2}))$ durch den Modul $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, M_d)$ minimal überdeckt. Daher entsteht beim Verbinden der beiden minimalen Auflösungen ein auch insgesamt minimaler Komplex.

Da nach 1.1.13 und 1.2.17 minimale Auflösungen über E eindeutig sind, ist unsere Konstruktion bei festem M unabhängig von d.

Nach Satz 1.4.12 sind weiter je zwei $\mathcal{F}$ repräsentierende Moduln in hohen Graden identisch. Daher ist $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ auch unabhängig von der Wahl von M.

2.3 Eigenschaften der Tate-Auflösung

Bevor wir zu Beispielen kommen, wollen wir studieren, wie wir die Moduln und einige Differenziale von Tate–Auflösungen beschreiben können. Elementar hierzu ist der folgende, 2003 von Eisenbud, Fløystad und Schreyer bewiesene Satz [5, Theorem 4.1]:

Satz 2.3.1. *Ist $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe über $\mathbb{P}(W)$, so gilt für den linearen Teil der Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ die Beziehung*

$$\operatorname{lin}(\mathbf{T}(\mathcal{F})) = \bigoplus_j \mathbf{R}\left(\bigoplus_i \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i))\right) .$$

Insbesondere gilt für die Terme T^i von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$:

$$T^i \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j))) ,$$

wobei $\mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j))$ als im Grad $i-j$ konzentrierter Vektorraum aufgefasst wird.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir den Funktor Ext sowie Hilfsmittel aus [5], die wir hier nicht im vollen Umfang darlegen können. Für letzte Details verweisen wir daher den Leser auf diese Quelle.

Beweis. Wir schreiben kurz $\mathbf{H}^j := \bigoplus_i \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i))$. In Analogie zur Definition von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ wählen wir eine beliebige Zahl $d > \operatorname{reg}(\mathbf{H}^0_{\geq 0})$. Der Modul $M := \mathbf{H}^0_{\geq d}$ ist dann d-regulär. Da wir dabei d beliebig groß wählen können, genügt es zu zeigen, dass die Komplexe $\operatorname{lin}(\mathbf{T}(\mathcal{F}))$ und $\bigoplus_j \mathbf{R}(\mathbf{H}^j)$ im kohomologischen Grad $< d$ übereinstimmen.

Schritt 1: In einem ersten Schritt zeigen wir, dass der lineare Teil der freien Auflösung F_P des E-Moduls $P := \operatorname{coker}(\operatorname{Hom}(E, \mathbf{H}^0_d) \to \operatorname{Hom}(E, \mathbf{H}^0_{d+1}))$ gerade $\bigoplus_j \mathbf{R}(\mathbf{H}^j_{\mathfrak{m}}(M))$ ist, wobei $\mathfrak{m} = S_{\geq 1}$ das maximale, homogene Ideal von S bezeichnet. Seien dazu im Folgenden die $\Bbbk$-Homomorphismen eines E-Moduls nach $\Bbbk$ mit $(-)^*$ bezeichnet. Ist I eine injektive Auflösung von P^*, so gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{lin}(F_P) &= (\operatorname{lin} I)^* \\
&= (\mathbf{R}(\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{L}(P^*))))^* \\
&= (\mathbf{R}(\mathbf{H}^\bullet(\operatorname{Hom}_S(\mathbf{L}P, S))))^* \\
&= (\mathbf{R}(\operatorname{Ext}^\bullet_S(M, S)))^* \ .
\end{aligned}$$

Dabei betrachten wir $D := \operatorname{Ext}^l_S(M, S)$ als konzentriert im kohomologischen Grad l. Die zweite und vierte Gleichheit gelten dann nach Theorem 3.7 in [5], die dritte folgt direkt aus den Definitionen. Es bleibt also noch zu zeigen, dass gilt $(\mathbf{R}(\operatorname{Ext}^\bullet_S(M, S)))^* = \bigoplus_j \mathbf{R}(\mathbf{H}^j_{\mathfrak{m}}(M))$.

Mit $E^* = \omega_E = E \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V$ gilt

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Hom}_\Bbbk(E, D))^* &= (E^* \otimes_\Bbbk D)^* \\
&= E^* \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} W^* \otimes_\Bbbk D^* \\
&= \operatorname{Hom}_\Bbbk(E, D^* \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V) \ ,
\end{aligned}$$

also insbesondere

$$\mathbf{R}(D)^* = \mathbf{R}(D^* \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V) \ ,$$

wobei wir $D^* \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V$ als im kohomologischen Grad $n + 1 - l$ konzentriert betrachten. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
D^* &= (\operatorname{Ext}^l_S(M, S) \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} W \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V)^* \\
&= (\operatorname{Ext}^l_S(M, S \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} W) \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V)^* \\
&= \mathbf{H}^{n+1-l}_{\mathfrak{m}}(M) \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} W \ .
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Ergebnisse zusammen, so folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(D)^* &= \mathbf{R}(D^* \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V) \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{H}^{n+1-l}_{\mathfrak{m}}(M) \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} W \otimes_\Bbbk \Lambda^{n+1} V) \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{H}^{n+1-l}_{\mathfrak{m}}(M)) \ .
\end{aligned}$$

Schritt 2: Es gilt also $(\operatorname{lin}(\mathbf{T}(\mathcal{F})))_{<d} = \operatorname{lin}(F_P) = \bigoplus_j \mathbf{R}(\mathbf{H}^j_{\mathfrak{m}}(M))$. Betrachten wir zunächst die Summanden für $j > 1$. Die Eigenschaften der lokalen Kohomologie (1.4.20) liefern direkt die Identität $\mathbf{R}(\mathbf{H}^j_{\mathfrak{m}}(M)) = \mathbf{R}(\mathbf{H}^{j-1})$.

Der Summand für $j = 0$ verschwindet, denn wegen $d > \operatorname{reg}(\mathbf{H}^0_{\geq 0})$ gilt schon $\mathbf{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$.
Für $j = 1$ liefert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_i \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i)) \longrightarrow \mathbf{H}^1_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$$

aus 1.4.20, angewandt auf unseren Fall:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus_{i \geq d} \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i)) \longrightarrow \bigoplus_i \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i)) \longrightarrow \mathbf{H}^1_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0 \ .$$

Aus der Exaktheit ergibt sich, dass $\mathbf{H}^1_{\mathfrak{m}}(M)$ und $\mathbf{H}^0$ in allen Graden $< d$ übereinstimmen. $\square$

Korollar 2.3.2. *Mit den Bezeichnungen des Satzes gilt*

$$T^i \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \omega_E(j-i) \otimes \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j)) \ .$$

Beweis. Für jeden $\Bbbk$-Vektorraum V gilt $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, V) \cong \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk) \otimes V$, sowie $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(E, \Bbbk) \otimes V \cong \omega_E \otimes V$ nach Satz 1.1.12. $\square$

Bemerkung 2.3.3. Die in Korollar 2.3.2 gewonnene Darstellung der Tate–Auflösung erlaubt es uns, die Kohomologiegruppen einer Garbe sehr übersichtlich zu präsentieren. Ist nämlich $\mathcal{F}$ eine Garbe mit Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$, so gilt für die in 1.2.11 definierten Betti–Zahlen:

$$b_{i,j-i} = \dim \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j)) \ =: \ h^j(\mathcal{F}(i-j))$$

bzw.

$$b_{i,j} = \dim \mathbf{H}^{i+j}(\mathcal{F}(-j)) \ = \ h^{i+j}(\mathcal{F}(-j)) \ .$$

Das Betti-Diagramm von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ hat also folgende Gestalt:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
j & \cdots & h^j(\mathcal{F}(-j-1)) & h^j(\mathcal{F}(-j)) & h^j(\mathcal{F}(-j+1)) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & \cdots & h^1(\mathcal{F}(-2)) & h^1(\mathcal{F}(-1)) & h^1(\mathcal{F}(0)) & \cdots \\
0 & \cdots & h^0(\mathcal{F}(-1)) & h^0(\mathcal{F}(0)) & h^0(\mathcal{F}(1)) & \cdots \\
\hline
 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots
\end{array}$$

Somit ist es möglich, aus den Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ die Terme der zugehörigen Tate–Auflösung zu berechnen. Diese Möglichkeit werden wir in den ersten Beispielen einsetzen.
In der Praxis ist der umgekehrte Weg deutlich interessanter. Die direkte Berechnung selbst einzelner Kohomologiegruppen ist relativ aufwändig.

Zur Berechnung einer Tate–Auflösung hingegen bedarf es nur zweier freier Auflösungen. Dieses Problem ist computational wesentlich einfacher, und aus dem resultierenden Betti–Diagramm lassen sich direkt alle Kohomologiegruppen auslesen.

Beispiel 2.3.4. Wir haben hier einige wenige Kohomologieberechnungen zusammengestellt. Die Rechnungen liefen auf einem Pentium4 mit 2,6GHz mit dem Emacs-Interface von Macaulay2. Da wir hier nur einen ersten Eindruck liefern wollen, sind die genauen Einzelheiten der Berechnungen an dieser Stelle nicht von Interesse; der verwendete Macaulay2–Code befindet sich im Anhang. In der folgenden Tabelle geben wir zunächst an, bei welcher Garbe und zu welchen Twists wir die Kohomologiegruppen berechnet haben. Die Spalte `tate` bezieht sich auf die Berechnung der angegebenen Kohomologiegruppen unter Verwendung der Tate–Auflösung, die Spalte `HH` auf die Berechnung mit der in Macaulay2 implementierten Standardfunktion. Die letzte Spalte gibt jeweils an, um welchen Faktor die Berechnung über die Tate–Auflösung schneller war als das herkömmliche Verfahren.

Garbe	Twists	Zeit in s		Faktor
		`tate`	`HH`	
Horrocks–Mumford Bündel in $\mathbb{P}^4$	-7 bis 0	0,250	20,672	82,7
wie oben, aber nur $\mathbf{H}^4$	-10	0,235	0,234	1,0
Rationale Normkurve vom Grad 10	-2 bis 0	4,844	19,718	4,1
wie oben	8 bis 9	1,875	13,328	7,1
wie oben, aber nur $\mathbf{H}^0$	60	6,001	0,265	0,04
wie oben, aber nur $\mathbf{H}^0$	120	—	0,281	—

Diese Beispiele zeigen bereits, dass die Stärken der Kohomologieberechnung über die Tate–Auflösung sich dann zeigen, wenn viele Kohomologiegruppen, oder nur solche von betragsmäßig kleinen Twists benötigt werden. Bei großen Twists bricht allerdings die Berechnung der Tate–Auflösung schneller mit einem „monomial overflow“ ab, so geschehen im letzten Beispiel.

Die teilweise enorme Beschleunigung der Berechnung ist zu großen Teilen darauf zurückzuführen, dass äußere Algebren (etwa im Vergleich zu symmetrischen Algebren) vergleichsweise wenige Elemente haben und daher Auflösungen sehr schnell berechnet werden können.

Zurück zu den Tate–Auflösungen. Zur Vereinfachung der Darstellung vereinbaren wir nachstehende Schreibweise:

Bemerkung 2.3.5. Wir haben gesehen, dass wir die Terme in der Tate–Auflösung einer Garbe $\mathcal{F}$ in der Form

$$T^i = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \omega_E(j)^{b_{i,j}}$$

darstellen können. Dabei sind $b_{i,j} = b_{i,j}(\mathbf{T}(\mathcal{F}))$ die Betti–Zahlen von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$. Zur Präsentation der Tate–Auflösung verwenden wir in Zukunft das Betti-Diagramm von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe mit n-dimensionalem Träger, so gilt nach Satz 1.4.18 $b_{i,j-i} = 0$ für $j > n$. Das Diagramm hat also die folgende, auch nach oben beschränkte Gestalt:

$$\begin{array}{c|ccccc}
n & \cdots & b_{-1,n+1} & b_{0,n} & b_{1,n-1} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
2 & \cdots & b_{-1,3} & b_{0,2} & b_{1,1} & \cdots \\
1 & \cdots & b_{-1,2} & b_{0,1} & b_{1,0} & \cdots \\
0 & \cdots & b_{-1,1} & b_{0,0} & b_{1,-1} & \cdots \\
\hline
 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots
\end{array}$$

Die zugehörigen Differenziale beschreiben wir meist mit Matrizen über E.

2.4 Elementare Beispiele

Wir wollen uns nun die Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ einiger Garben ansehen und dabei verschiedene Konstruktionsmethoden demonstrieren. Hier wie auch später ersetzen wir der Übersicht halber in den Betti–Diagrammen Nullen durch Punkte.

Beispiel 2.4.1.

- Sei $n = 0$, also $V = \langle e_0 \rangle$, und $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^0}$. Der $\mathcal{F}$ darstellende Modul $\bigoplus_{d \geq 0} \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i)) = \Bbbk[x_0]$ hat Regularität 0 (vgl. Beispiel 1.2.28). Die Terme von $\mathbf{R}(\mathcal{F})$, und damit die Terme der Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ mit kohomologischem Grad $i > 0$, sind daher

$$\begin{aligned} T^i &\cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \omega_E(j-i) \otimes \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j)) \\ &\cong \omega_E(-i) \otimes \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i)) \\ &\cong \omega_E(-i) \otimes k[x_0]_i \cong \omega_E(-i) \ . \end{aligned}$$

  Die zugehörigen Differenziale sind gegeben durch

$$\varphi^i(1 \otimes x_0^i) = e_0 \otimes x_0^{i+1} \ ,$$

  also bzgl. der kanonischen Basen der $\Bbbk[x_0]_i$ durch die Matrix $\big(e_0\big)$. Die Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ ist der Komplex mit dem Betti–Diagramm

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\hline
 & \cdots & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots
\end{array}$$

  und den (linearen) Differenzialen $\big(e_0\big)$.

- Ist $n = 1$ und $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, so hat V die Basis $\{e_0, e_1\}$. Ein darstellender Modul von $\mathcal{F}$ ist

$$M = \bigoplus_i H^0(\mathcal{F}(i)) = \bigoplus_{i \geq 0} k[x_0, x_1]_i \ .$$

Auch er hat als Polynomring die Regularität 0 (vgl. wieder 1.2.28). Nach 2.3.1 besteht die unterste Zeile des Betti–Diagramms von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ aus den Dimensionen der homogenen Bestandteile von M, genauer $b_{i,-i}(\mathbf{T}(\mathcal{F})) = \dim(M_i)$. Der Satz 1.4.18 über die Kohomologiegruppen von Garben des $\mathbb{P}^n$ besagt

$$b_{i,1-i}(\mathbf{T}(\mathcal{F})) = \dim(\mathbf{H}^1(\mathcal{F}(i-1))) = \dim(\mathbf{H}^0(\mathcal{F}(-i-1)))$$

und liefert so die übrigen Einträge. Es folgt

$$\mathbf{T}(\mathcal{F}) : \quad \begin{array}{c|cccccccc} 1 & \cdots & 3 & 2 & 1 & . & . & . & \cdots \\ 0 & \cdots & . & . & . & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \hline & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

Zur Erinnerung: Jeder Punkt steht für eine 0. Die Abbildungen im linearen Teil haben dabei eine Form analog zu

$$\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 & e_1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} e_0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_0 & 0 \\ 0 & e_1 & e_0 \\ 0 & 0 & e_1 \end{pmatrix} ;$$

die Matrix des nichtlinearen Differenzials ist

$$\begin{pmatrix} e_0 \wedge e_1 \end{pmatrix} .$$

- Für $n > 1$ und $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ ergibt sich analog

$$\mathbf{T}(\mathcal{F}) : \quad \begin{array}{c|cccccccc} n & \cdots & 2n+1 & n+1 & 1 & . & . & . & \\ n-1 & & . & . & . & . & . & . & \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 1 & & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & & . & . & . & 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots \\ \hline & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

mit mittlerem Differenzial

$$\begin{pmatrix} e_0 \wedge \ldots \wedge e_n \end{pmatrix} \ .$$

Beispiel 2.4.2. Betrachten wir nun ein minimal komplizierteres Beispiel, und zwar dasjenige der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{v_2\mathbb{P}^1}$ der rationalen Normkurve vom Grad 2. Für sie erhalten wir eine Tate–Auflösung mit Termen

$$\begin{array}{c|cccccccc} 1 & \cdots & 7 & 5 & 3 & 1 & . & . & \cdots \\ 0 & \cdots & . & . & . & 1 & 3 & 5 & \cdots \\ \hline & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

Dabei sind die linearen Differenziale von der zu den Beispielen 2.4.1 analogen Form, die Differenziale in der Mitte sind

$$\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 \wedge e_0 & e_2 \wedge e_0 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & e_0 \\ e_0 \wedge e_2 & e_1 \\ e_1 \wedge e_2 & e_2 \end{pmatrix} .$$

Kapitel 3

Tate–Auflösungen und die Veronese–Einbettung

Die Veronese–Einbettung $v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ für $N = \binom{n+d}{d} - 1$ induziert eine Abbildung $v_* := (v_d)_*$ auf Ebene der Garben auf $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{P}^N$.

Das Bild einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ unter dieser Abbildung ist wieder kohärent (vgl. Korollar 1.5.7), also ist auch ihm eine Tate–Auflösung zugeordnet. Da es nach Bemerkung 1.5.8 bei der Betrachtung der Kohomologiegruppen keinen Unterschied macht, ob wir das Bild von $\mathcal{F}$ als Garbe über $\mathbb{P}^N$ oder $v_d\mathbb{P}^n$ ansehen, können und werden wir v_d oft als Abbildung $\mathbb{P}^n \to v_d\mathbb{P}^n$ betrachten.

Selbstverständlich lässt sich die Tate–Auflösung der Bildgarbe $v_*\mathcal{F}$ nach Berechnung eines darstellenden Moduls der Definition folgend konstruieren. Da $v_*\mathcal{F}$ jedoch durch $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt ist, stellt sich die Frage, ob eine komplette Neuberechnung der Tate–Auflösung von $v_*\mathcal{F}$ notwendig ist, oder ob diese sich vielleicht aus der Auflösung von $\mathcal{F}$ konstruieren lässt.

Wir werden zeigen, dass das in der Tat der Fall ist, und auch darlegen, wie wir die neue Auflösung tatsächlich konstruieren können.

Zur Lösung dieses Problems gehen wir in zwei Schritten vor. Bevor wir uns mit den Differenzialen der Auflösung einer d-upel-eingebetteten Garbe $v_*\mathcal{F}$ beschäftigen können, müssen wir zunächst herausfinden, auf welchen Räumen diese operieren. Dazu untersuchen wir die Terme der Tate–Auflösung, für die sich über die Kohomologiegruppen ein einfacher Zusammenhang mit den Termen der Auflösung von $\mathcal{F}$ ergeben wird.

Anschließend wenden wir uns den Differenzialen selbst zu. Als Einstieg betrachten wir dazu die Auflösung einer Garbe mit 0-dimensionalem Träger, da dort die Abbildungen die einfachste Struktur aufweisen. Die Konstruktion aus diesem Spezialfall lässt sich dann auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Im gesamten Kapitel verwenden wir weiter die Bezeichnungen aus Kapitel 2. Außerdem vereinbaren wir:

Notation 3.0.1. Es bezeichne $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(W)$, dargestellt durch den Modul $M = \bigoplus_i \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i))$.

Seien $\widetilde{V}$ der zu $\mathrm{Sym}_d W$ duale Vektorraum, $\widetilde{E} = \Lambda\widetilde{V}$ die äußere Algebra über $\widetilde{V}$, und $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = d\}$ diejenige Basis von $\widetilde{V}$, die zur Basis $\{x^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = d\}$ von $\mathrm{Sym}_d W$ dual ist. Wir schreiben auch $f_{\{i_1,\dots,i_d\}}$ für das zu $x_{i_1} \cdots x_{i_d}$ duale Element dieser Basis.

3.1 Die Transformation der beteiligten Moduln

Zum Studium der Moduln in der Tate-Auflösung $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ der Veronese–Einbettung einer Garbe erinnern wir uns an Korollar 2.3.2. Danach hat jeder solche Modul die Form

$$T^i \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \omega_E(j-i) \otimes \mathbf{H}^j(v_*\mathcal{F}(i-j)) \ .$$

Wollen wir einen Zusammenhang zwischen den Moduln der Tate–Auflösungen von $\mathcal{F}$ und $v_*\mathcal{F}$ herstellen, genügt es also, Zusammenhänge zwischen den Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ und $v_*\mathcal{F}$ zu untersuchen.

Wir betrachten zunächst einige Beispiele:

Beispiel 3.1.1. Sei $n = 1$ und $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Wir haben in 2.4.1 gesehen, dass die Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ die Form

$$\begin{array}{c|cccccccc} 1 & \cdots & 3 & 2 & 1 & . & . & . & \cdots \\ 0 & \cdots & . & . & . & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \hline & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

hat. Die Betti–Zahlen der Auflösung von $(v_2)_*\mathcal{F}$ kennen wir aus 2.4.2:

$$\begin{array}{c|cccccccc} 1 & \cdots & 7 & 5 & 3 & 1 & . & . & \cdots \\ 0 & \cdots & . & . & . & 1 & 3 & 5 & \cdots \\ \hline & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

Allgemein berechnen wir für die 2-upel-Einbettung eines Twists $\mathcal{F}(k+2l)$, $0 \le k < 2$ das Diagramm

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & \cdots & 4-k-1 & 2-k-1 & . & . & \cdots \\ 0 & \cdots & . & k+1 & 2+k+1 & 4+k+1 & \cdots \\ \hline & \cdots & -l-1 & -l & -l+1 & -l+2 & \cdots \end{array}$$

Bei d-upel–Einbettung von $\mathcal{F}(k+dl)$, $0 \le k < d$, erhalten wir Diagramme der Form

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & \cdots & 2d-k-1 & d-k-1 & . & . & \cdots \\ 0 & \cdots & . & k+1 & d+k+1 & 2d+k+1 & \cdots \\ \hline & \cdots & -l-1 & -l & -l+1 & -l+2 & \cdots \end{array}$$

Das Betti-Diagramm von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ wird scheinbar „durch eine geeignet ausgedünnte und zusammengeschobene Version ersetzt“.

Natürlich bieten diese wenigen und dazu noch sehr speziellen Beispiele mit einer der einfachsten Garben auf dem kleinen Raum $\mathbb{P}^1$ keine verlässliche Grundlage für Vermutungen zur allgemeinen Gestalt des Betti–Diagramms der Veronese–Einbettung einer Garbe. Doch auch Experimente mit anderen Beispielen liefern ähnliche Ergebnisse.

Wir wollen nun unsere Intuition vom Zusammenschieben des Diagramms formalisieren und ihre Richtigkeit beweisen. Um dies tun zu können, benötigen wir einen letzten Hilfssatz. Seien dazu $X = \mathbb{P}^n$ und $Y = v_d\mathbb{P}^n$.

Lemma 3.1.2 (Projektionsformel). *Seien $f\colon X \to Y$ ein Morphismus, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \cong f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \ .$$

Beweis. Im Fall $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^n$ gilt

$$f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} = f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y^n \cong (f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y)^n \cong (f_*\mathcal{F})^n$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E} &= \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_Y^n \\
&= \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^{-1}\mathcal{O}_Y^n \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \\
&\cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} ((f^{-1}\mathcal{O}_Y)^n \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \\
&\cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)^n \\
&\cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^n \\
&\cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)^n \\
&\cong \mathcal{F}^n \ ,
\end{aligned}$$

also zusammen

$$f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \cong f_*(\mathcal{F}^n) \cong (f_*\mathcal{F})^n \cong f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \ .$$

Im allgemeinen Fall ist $\mathcal{E}$ lokal isomorph zu $\mathcal{O}_Y^n$, und wir konstruieren wie oben Isomorphismen auf einer offenen Überdeckung von Y. Da diese Isomorphismen kanonisch sind, erzeugen sie den gesuchten globalen Isomorphismus. □

Dies ermöglicht uns nun den Beweis folgenden Satzes über die Form der Moduln der Tate–Auflösung einer d-upel–eingebetteten Garbe.

Satz 3.1.3 (Modultransformation). *Die d-upel–Einbettung einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ transformiert die Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ zu*

$$\mathbf{H}^j((v_*\mathcal{F})(i)) \cong \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i \cdot d)) \ .$$

Beweis. Nach Satz 1.5.5 existiert eine offene, affine Überdeckung $\{V_i\}$ von Y, so dass die Urbilder $v_d^{-1}(V_i)$ affin sind, d.h. v_d ist ein affiner Morphismus. Nach [14, III.4.1] folgt daraus schon

$$\mathbf{H}^j(v_*\mathcal{F}) \cong \mathbf{H}^j(\mathcal{F})$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und für alle kohärenten Garben $\mathcal{F}$. Es genügt daher zu zeigen, dass für $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(v_*\mathcal{F})(i) \cong \mathcal{F}(i \cdot d) \ .$$

Sei also $i \in \mathbb{Z}$ und $V \subseteq Y$ eine beliebige, offene Menge. Dann ist das Urbild $U = v_d^{-1}(V) \subseteq X$ ebenfalls offen und isomorph zu V, da $v_d\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus ist. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
((v_*\mathcal{F})(i))(V) &= (v_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(i))(V) \\
&\overset{3.1.2}{\cong} (v_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} v^*\mathcal{O}_Y(i)))(V) \\
&= (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} v^*\mathcal{O}_Y(i))(U) \\
&\overset{1.5.6}{=} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(i \cdot d))(U) \\
&= (\mathcal{F}(i \cdot d))(U) \ .
\end{aligned}$$

Also gilt $(v_*\mathcal{F})(i) \cong \mathcal{F}(i \cdot d)$.

□

Korollar 3.1.4. *Hat $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ das Betti–Diagramm*

$$\begin{array}{c|cccccc}
n & \cdots & b_{-1,n+1} & b_{0,n} & b_{1,n-1} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & \cdots & b_{-1,2} & b_{0,1} & b_{1,0} & \cdots \\
0 & \cdots & b_{-1,1} & b_{0,0} & b_{1,-1} & \cdots \\
\hline
 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots
\end{array}$$

so ist

$$\begin{array}{c|cccccc}
n & \cdots & b_{n+(-n-1)d,(n+1)d} & b_{n+(-n)d,nd} & b_{n+(-n+1)d,(n-1)d} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & \cdots & b_{1-2d,2d} & b_{1-d,d} & b_{1,0} & \cdots \\
0 & \cdots & b_{-d,d} & b_{0,0} & b_{d,-d} & \cdots \\
\hline
 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots
\end{array}$$

das Betti–Diagramm von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$. Dieses besteht also aus den Diagonalen der Form $\{b_{di+j,-di}(\mathbf{T}(\mathcal{F}))\,|\,j \in \mathbb{N}\}$ im Diagramm von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
b_{i,j-i}(\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})) &= \dim \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j)) \\
&\overset{3.1.3}{=} \dim \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(d(i-j))) \\
&= \dim \mathbf{H}^j(\mathcal{F}((j+d(i-j))-j)) \\
&= b_{j+d(i-j),d(j-i)}(\mathbf{T}(\mathcal{F})) \ .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1.5. Die Tate–Auflösungen $\mathbf{T}(\mathcal{F}(i))$ der Twists von $\mathcal{F}$ sind von $i \in \mathbb{Z}$ insofern praktisch unabhängig, als sie sich lediglich durch eine Verschiebung von der Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ unterscheiden. Genauer gilt $\mathbf{T}(\mathcal{F}(i)) = \mathbf{T}(\mathcal{F})[-i]$. Für die Auflösung der Veronese–Einbettung eines Twists gilt dies nicht mehr. Allerdings ist $\mathbf{T}(v_*(\mathcal{F}(i)))$ (bis auf Verschiebung) nur abhängig von $i \bmod d$.

3.2 Die Transformation der Auflösung von Garben mit 0-dimensionalem Träger

Nun, da wir wissen, wie sich die Terme von Tate–Auflösungen unter den Veronese–Einbettungen verhalten, können wir uns Gedanken über die Differenziale machen. Wir beginnen dazu mit Auflösungen, die nur lineare Differenziale enthalten. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n$ mit 0-dimensionalem Träger. Dann gilt nach 1.4.18

$$\mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i)) = 0 \quad \text{für alle } j > 0 \text{ und alle } i \in \mathbb{N}.$$

Alle Differenziale der Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ sind damit linear, insbesondere ist $\mathbf{T}(\mathcal{F}) = \operatorname{lin}(\mathbf{T}(\mathcal{F})) = \mathbf{R}(\bigoplus_i \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(i)))$. Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für die Tate–Auflösung von $v_*\mathcal{F}$.

Wieder wollen wir uns zunächst an einem Beispiel ansehen, wie die Differenziale von $v_*\mathcal{F}$ aussehen:

Beispiel 3.2.1. Sei $\mathcal{F}$ die Strukturgarbe des Punktes $\{(1:2)\} \subseteq \mathbb{P}^1$. Die zugehörige Tate–Auflösung ist

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \hline & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots \end{array}$$

mit Differenzialen

$$E \to E;\ e \mapsto (e_0 + 2e_1) \wedge e\ .$$

Bei der 2-upel–Einbettung ergibt sich dasselbe Betti-Diagramm, zusammen mit den Differenzialen

$$\widetilde{E} \to \widetilde{E};\ f \mapsto (f_{(2,0)} + 2f_{(1,1)} + 4f_{(0,2)}) \wedge f\ ,$$

bei 3-upel–Einbettung mit den Differenzialen

$$\widetilde{E} \to \widetilde{E};\ f \mapsto (f_{(3,0)} + 2f_{(2,1)} + 4f_{(1,2)} + 8f_{(0,2)}) \wedge f\ .$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Matrizen, welche die Differenziale der Tate–Auflösung von $v_*\mathcal{F}$ darstellen, im Wesentlichen durch Multiplikation der darstellenden Matrizen der Differenziale in der Auflösung von $\mathcal{F}$ entstehen. Dazu machen wir uns erst einmal Gedanken über den Zusammenhang der darstellenden Matrizen der Differenziale mit den darstellenden Matrizen der Multiplikationsabbildungen, welche die S-Modulstruktur von M definieren.

Notation 3.2.2. Sei im Folgenden $M = \bigoplus_l M_l = \bigoplus_l \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(l))$ darstellender Modul einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ mit 0-dimensionalem Träger, und sei weiter die S-Modulstruktur auf M durch die Multiplikationsabbildungen $\mu^l\colon S \otimes M_l \to M_{l+1}$ gegeben. Mit $\mathcal{B}_l = \{m_1^{(l)}, \dots, m_{\mathrm{rg}(M_l)}^{(l)}\}$ bezeichnen wir für diesen Abschnitt fest gewählte Basen der $\Bbbk$-Vektorräume M_l.

Lemma 3.2.3. *Seien die Einschränkungen*

$$\mu^l(x_i,\cdot)\colon \langle x_i\rangle \otimes M_l \to M_{l+1}$$

der Multiplikationsabbildungen μ^l auf M_l bzgl. der Basen $\mathcal{B}_l$ und $\mathcal{B}_{l+1}$ durch Matrizen $N_i^l \in \mathrm{Mat}(\mathrm{rg}(M_{l+1}) \times \mathrm{rg}(M_l), \Bbbk)$ gegeben, μ^l also durch

$$\sum_{i=0}^{n} x_i N_i^l \in \mathrm{Mat}(\mathrm{rg}(M_{l+1}) \times \mathrm{rg}(M_l), W)\ .$$

Dann werden die (linearen) Differenziale $\varphi^l\colon M_l \to V \otimes M_{l+1}$ der Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ bzgl. derselben Basen von M_l und M_{l+1} durch die Matrizen

$$\sum_{i=0}^{n} e_i N_i^l \in \mathrm{Mat}(\mathrm{rg}(M_{l+1}) \times \mathrm{rg}(M_l), V)$$

beschrieben. Das bedeutet, dass φ^l und μ^l bzgl. fest gewählter Basen der Vektorräume M_l im Wesentlichen dieselben Transformationsmatrizen haben.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation beschränken wir uns in der folgenden Betrachtung auf einen festen Index l und schreiben kurz $\mu_i := \mu^l(x_i,\cdot)$ sowie $N_i := N_i^l$. Ist

$$\mu_i(m_j^{(l)}) = \sum_k \nu_{i,j,k} m_k^{(l+1)}\ ,$$

so gilt $N_i = (\nu_{i,j,k})_{j,k}$.

Wir spalten $\varphi^l\colon M_l \to V \otimes M_{l+1}$ in der bzgl. der Basis $e_0, \dots, e_n$ von V offensichtlichen Weise auf, nämlich durch Projektion auf die von den e_i erzeugten Unterräume. So erhalten wir Abbildungen

$$\varphi_i := \varphi_i^l\colon M_l \to \langle e_i\rangle \otimes M_{l+1}\ .$$

Wegen

$$\begin{aligned}\varphi_i(m_j^{(l)}) &= e_i \otimes \mu_i(m_j^{(l)}) \\ &= e_i \otimes \sum_k \nu_{i,j,k} m_k^{(l+1)} \\ &= \sum_k \nu_{i,j,k} \left(e_i \otimes m_k^{(l+1)} \right)\end{aligned}$$

hat auch φ_i die darstellende Matrix N_i. Es folgt, dass

$$\sum_{i=0}^{n} e_i N_i^l \in \operatorname{Mat}(\operatorname{rg}(M_{l+1}) \times \operatorname{rg}(M_l), V)$$

die darstellende Matrix von φ bzgl. der gegebenen Basen ist. □

Satz 3.2.4. *Seien die Differenziale $\varphi^l \colon M_l \to V \otimes M_{l+1}$ der Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ gegeben durch*

$$\sum_{i=0}^{n} e_i N_i^l \in \operatorname{Mat}(\operatorname{rg}(M_{l+1}) \times \operatorname{rg}(M_l), V)\ .$$

Seien weiter $\Phi^k \colon M_{kd} \to (\operatorname{Sym}_d W)^* \otimes M_{(k+1)d}$ die Differenziale der Tate–Auflösung von $v_*\mathcal{F}$. Dann wird Φ^k dargestellt durch

$$\sum_{i_1 \le \ldots \le i_d} f_{\{i_1,\ldots,i_d\}} \cdot N_{i_d}^{kd+d-1} \cdots N_{i_1}^{kd} \in \operatorname{Mat}(\operatorname{rg}(M_{(k+1)d}) \times \operatorname{rg}(M_{kd}), (\operatorname{Sym}_d W)^*)\ .$$

Beweis. Die Multiplikationsabbildung des $\operatorname{Sym}(\operatorname{Sym}_d W)$-Moduls $\bigoplus_k M_{kd}$, der bekanntlich ein darstellender Modul von $v_*\mathcal{F}$ ist, ist die von $M = \bigoplus M_l$ induzierte, also die Hintereinanderausführung geeigneter μ^l. Betrachten wir die Einschränkungen

$$\mu^{kd}(x_{i_1} \cdots x_{i_d}, \cdot) \colon \langle x_{i_1} \cdots x_{i_d} \rangle \otimes M_{kd} \to M_{(k+1)d}$$

von μ^{kd}, so gilt genauer

$$\mu^{kd}(x_{i_1} \cdots x_{i_d}, \cdot) = \mu_{i_d}^{kd+d-1} \circ \ldots \circ \mu_{i_1}^{kd}\ .$$

Die Kommutativität von μ garantiert die Unabhängigkeit von der Reihenfolge der x_{i_j}. Da nach Lemma 3.2.3 mit φ_i^l auch μ_i^l durch N_i^l gegeben ist, ist die darstellende Matrix obiger Abbildung bzgl. der Basen $\mathcal{B}_{kd}$ und $\mathcal{B}_{(k+1)d}$ gerade

$$N_{i_d}^{kd+d-1} \cdots N_{i_1}^{kd} \in \operatorname{Mat}(\operatorname{rg}(M_{(k+1)d}) \times \operatorname{rg}(M_{kd}), \Bbbk)\ .$$

Die darstellende Matrix von μ^{kd} ist also

$$\sum_{i_1 \le \ldots \le i_d} x_{i_1} \cdots x_{i_d} \cdot N_{i_d}^{kd+d-1} \cdots N_{i_1}^{kd} \in \operatorname{Mat}(\operatorname{rg}(M_{(k+1)d}) \times \operatorname{rg}(M_{kd}), \operatorname{Sym}_d W)\ .$$

Nach Lemma 3.2.3 folgt die Behauptung. □

3.3 Die Transformation der Auflösung von Garben mit höherdimensionalem Träger

Hat $\mathcal{F}$ einen Träger der Dimension $n > 1$, so hat das Betti–Diagramm von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ mehrere Zeilen.

Gleiches gilt für die Tate–Auflösung von $\mathcal{G} := v_*\mathcal{F}$. Wir müssen daher hier erstmals nicht nur lineare, sondern beispielsweise auch quadratische Abbildungen betrachten. Für den linearen Anteil erinnern wir uns an die Zerlegung

$$\operatorname{lin}(\mathbf{T}(\mathcal{G})) \quad = \quad \bigoplus_j \mathbf{R}\left(\bigoplus_i \mathbf{H}^j(\mathcal{G}(i))\right)$$

aus Satz 2.3.1, die es uns erlaubt, die Komplexe $\mathbf{R}(\bigoplus_i \mathbf{H}^j(\mathcal{G}(i)))$, $0 \leq j \leq n$ getrennt zu betrachten. Für diese überträgt sich die Argumentation aus Kapitel 3.2. Damit können wir die linearen Anteile der Abbildungen von $\mathbf{T}(\mathcal{G})$ bereits vollständig aus denen von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ berechnen:

Korollar 3.3.1. *Sei $\mathcal{G} = v_*\mathcal{F}$ die d-upel–Einbettung einer Garbe $\mathcal{F}$. Sei weiter Φ^k: $\mathbf{H}^j(\mathcal{G}(k)) \to (\operatorname{Sym}_d W)^* \otimes \mathbf{H}^j(\mathcal{G}(k+1))$ der lineare Anteil eines Differenzials von $\mathbf{T}(\mathcal{G})$, und seien für $l \in \{kd, \dots, (k+1)d\}$ die linearen Anteile φ^l: $\mathbf{H}^j(\mathcal{F}(l)) \to V \otimes \mathbf{H}^j(\mathcal{F}(l+1))$ der Differenziale der Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ gegeben durch die Matrizen*

$$\sum_{i=0}^{n} e_i N_i^l \in \operatorname{Mat}(\operatorname{rg}(\mathbf{H}^j(\mathcal{F}(l+1))) \times \operatorname{rg}(\mathbf{H}^j(\mathcal{F}(l))), V) \ .$$

Dann wird Φ^k dargestellt durch die Matrix

$$\sum_{i_1 \leq \dots \leq i_d} f_{\{i_1,\dots,i_d\}} \cdot N_{i_d}^{kd+d-1} \cdots N_{i_1}^{kd} \ .$$

Diese Überlegungen sind offenbar unabhängig von der Dimension der betrachteten Garbe. Das bedeutet, dass wir den linearen Teil der Tate–Auflösung der d-upel–Einbettung einer beliebigen kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^n$ aus dem linearen Teil der Tate–Auflösung von $\mathcal{F}$ konstruieren können.

Dies erlaubt es uns schon, die gesamte Tate–Auflösung von $v_*\mathcal{F}$ zu berechnen:

Algorithmus 3.3.2. *Gegeben die Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$, können wir wie folgt Ausschnitte der Tate–Auflösung von $v_*\mathcal{F}$ berechnen.*

0. *In der Praxis ist nur ein endlicher Teil von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ gegeben. Diesen ergänzen wir durch den Beginn einer injektiven Auflösung des „letzten“ Differenzials so weit, dass wir die ersten Differenziale desjenigen Teils von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ erhalten, in dem $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ und $\mathbf{R}(\Gamma_*\mathcal{F})$ übereinstimmen.*

1. *Aus diesen bestimmen wir mit Satz 3.2.4 ein lineares Differenzial* Φ *von* $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$.

2. *Dann berechnen wir eine freien Auflösung von* $\operatorname{coker}(\Phi)$ *und eine injektive Auflösung von* $\ker(\Phi)$.

3. *Fügen wir die beiden Auflösungen zusammen, so erhalten wir* $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$.

Bemerkung 3.3.3. Natürlich ist es praktisch nicht möglich, in Schritt 2 die kompletten Auflösungen zu berechnen. Da wir nur an einem endlichen Ausschnitt von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ interessiert sind, ist dies jedoch auch nicht nötig. Wie viele Terme dieser Auflösungen wir wirklich berechnen, hängt davon ab, welchen Differenzialen von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ unser Interesse gilt.

Eine Implementierung des Algorithmus in Macaulay2 findet sich im Anhang.

3.4 Funktorielle Konstruktion der Differenziale

Es ist an dieser Stelle unbefriedigend, dass zur Bestimmung der nichtlinearen Differenziale mit Hilfe von Algorithmus 3.3.2 die Berechnung von Auflösungen notwendig ist. Unser weiteres Ziel ist es, nicht nur den linearen Teil sondern alle Differenziale explizit anzugeben.

Genauer wollen wir uns überlegen, wie wir auch nichtlineare Differenziale von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ direkt aus $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ bestimmen können. Kommen wir dazu kurz auf den Fall einer Garbe $\mathcal{F}$ mit 0-dimensionalem Träger und darstellendem Modul $M = \bigoplus_l M_l = \bigoplus_l \mathbf{H}^0(\mathcal{F}(l))$ zurück. Hier wissen wir, wie die Differenziale von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ aussehen, und aufgrund ihrer einfachen Struktur mag die folgende Konstruktion unnötig kompliziert scheinen. Doch die bisherige, koordinatengestützte Konstruktion ist nicht ohne weiteres zu verallgemeinern, und in diesem einfachen Fall ist die Korrektheit der nun vorgestellten, alternativen Herangehensweise offensichtlich.

Ein Differenzial $\widetilde{E} \otimes M_{l_0} \to \widetilde{E} \otimes M_{l_0+d}$ von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ können wir wie folgt beschreiben:

Wie schon in Kapitel 3.2 fassen wir die Differenziale von $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ als Abbildungen $M_l \to V \otimes M_{l+1}$ auf. Mit Hilfe von Lemma 3.2.3 ergeben sich daraus die adjungierten Abbildungen $\mu^l\colon W \otimes M_l \to M_{l+1}$. Aus Satz 3.2.4 wissen wir, dass das gesuchte Differenzial adjungiert ist zu der Multiplikationsabbildung

$$\mu\colon \mathrm{Sym}_d W \otimes M_{l_0} \to M_{l_0+d}\ .$$

Diese wiederum erhalten wir, indem wir die Komposition der Multiplikationsabbildungen μ^l in der Form

$$\nu\colon W^{\otimes d} \otimes M_{l_0} \to M_{l_0+d}$$

schreiben, und aufgrund der Symmetrie der Multiplikation auf M faktorisiert ν über $\mathrm{Sym}_d W \otimes M_{l_0}$. Insgesamt ergibt sich $\mu\colon \mathrm{Sym}_d W \otimes M_{l_0} \to M_{l_0+d}$ als Komposition der Einbettung $\mathrm{Sym}_d W \otimes M_{l_0} \to W^{\otimes d} \otimes M_{l_0}$ mit ν.

Um dies verallgemeinern können, benötigen wir den Begriff von Wegen in Auflösungen.

Definition 3.4.1. Sei $d\colon F \to F'$ ein Homomorphismus graduierter, freier E-Moduln, $F = \bigoplus_j F_j$ und $F' = \bigoplus_k F'_k$. Dann bezeichnen wir die Komponenten

$$F_j \hookrightarrow F \xrightarrow{d} F' \twoheadrightarrow F'_k$$

von d mit $d_{j,k}$.

Ist $(F^\bullet, d)$ ein Komplex graduierter, freier E-Moduln $F^i = \bigoplus_j F^i_j$, so heißt eine Folge

$$\left(d^i_{j_0,j_1}\colon F^i_{j_0} \to F^{i+1}_{j_1},\ d^{i+1}_{j_1,j_2}\colon F^{i+1}_{j_1} \to F^{i+2}_{j_2},\ \ldots,\ d^{i+n-1}_{j_{n-1},j_n}\colon F^{i+n-1}_{j_{n-1}} \to F^{i+n}_{j_n}\right)$$

ein *Weg* von $F^{i_0}_{j_0}$ nach $F^{i_n}_{j_n}$ in $F^\bullet$, wenn alle $d^{i+k}_{j_k,j_{k+1}}$ von 0 verschieden sind.

Beispiel 3.4.2. Betrachten wir das Beispiel der Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{O}_{v_2\mathbb{P}^1})$ aus 2.4.2. Sie hat die Gestalt:

1	$\cdots$	7	5	3	1	.	.	$\cdots$
0	$\cdots$	.	.	.	1	3	5	$\cdots$
	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$

Also sind $\left(d^{-1}_{1,1}, d^0_{1,0}, d^1_{0,0}\right)$ und $\left(d^{-1}_{1,0}, d^0_{0,0}, d^1_{0,0}\right)$ Wege zwischen den beiden Moduln vom Rang 3 in $\mathbf{T}(\mathcal{O}_{v_2\mathbb{P}^1})$, jedoch ist $\left(d^{-1}_{1,1}, d^0_{1,1}, d^1_{1,0}\right)$ kein solcher, weil $d^0_{1,1}$ und $d^1_{1,0}$ Nullabbildungen sind.

In den einleitenden Überlegungen haben wir also ein Differenzial der Form $\widetilde{E} \otimes M_{l_0} \to \widetilde{E} \otimes M_{l_0+d}$ von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ aus einem Weg von $E \otimes M_{l_0}$ nach $E \otimes M_{l_0+d}$ in $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ konstruiert. Die Vermutung ist nun, dass ein analoges Vorgehen allgemein die korrekte Abbildung liefert:

Vermutung 3.4.3. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $\mathbb{P}^n$ und $\Phi\colon \Lambda^m(\mathrm{Sym}_d W)^* \otimes A \to B$ eine Komponente eines Differenzials von $\mathbf{T}(v_*\mathcal{F})$ wie in 3.4.1.*

(i) Sei $\varphi^1, \ldots, \varphi^l$ ein Weg von $A_0 = A$ nach $A_{l+1} = B$ in $\mathbf{T}(\mathcal{F})$,

$$\mu^j\colon \Lambda^{m_j} W \otimes A_j \to A_{j+1}$$

adjungiert zu φ^j und

$$\nu\colon \bigotimes_{j=1}^{l} \Lambda^{m_j} W \otimes A \to B\ ,$$

die „Komposition" der μ^j, genauer die Abbildung

$$\mu^l \circ (\mathrm{id}_{\Lambda^{m_l}W} \otimes \mu^{l-1}) \circ \ldots \circ (\mathrm{id}_{\bigotimes_{j=3}^{l} \Lambda^{m_j}W} \otimes \mu^2) \circ (\mathrm{id}_{\bigotimes_{j=2}^{l} \Lambda^{m_j}W} \otimes \mu^1) \ .$$

Sei weiter $\iota\colon \Lambda^m(\mathrm{Sym}_d W) \to \bigotimes_j \Lambda^{m_j}W$ die natürliche Inklusion. Ersetzen wir Φ durch die zu $\nu\circ(\iota\otimes\mathrm{id}_A)$ adjungierte Abbildung, so entsteht wieder ein Komplex.

(ii) Seien $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_r\}$ diejenigen Abbildungen, die entstehen, wenn wir obige Konstruktion für alle Wege von A nach B in $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ durchführen. Dann ist Φ eine Linearkombination von $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$.

Bemerkung 3.4.4. Zwei Aspekte fallen bei dieser Konstruktion ins Auge:

- Das Korollar 3.1.4 zur Transformation der Moduln der Tate–Auflösung gibt die mögliche Länge eines Weges von A nach B vor: Mit den Bezeichnungen von 3.4.3 gilt $l = m(d-1)+1$.

- Ein Problem bei der praktischen Berechnung der neuen Auflösung auf diesem Wege ist die Abbildung $\Lambda^m(\mathrm{Sym}_d W) \to \bigotimes_j \Lambda^{m_j}W$.

  Wir wissen aus Korollar 1.3.11, wie wir $\Lambda^2(\mathrm{Sym}_d W)$ als Unterraum von $\Lambda^2(W) \otimes W^{\otimes 2d-2}$ auffassen können, und in diesem Fall ist auch der Isomorphismus $\Lambda^2(\mathrm{Sym}_d W) = \bigoplus_{a \text{ ungerade}} W^{(2d-a,a)}$ vergleichsweise leicht zu finden, wie etwa im folgenden Beispiel 3.4.5. Damit lässt sich obige Konstruktion im Prinzip für beliebige kohärente Garben auf Kurven durchführen. Im Prinzip deshalb, weil sie eine Summation über die Elemente der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{2d}$ involviert und daher rasch sehr ineffizient wird.

  Noch komplizierter ist die Situation bei Garben auf höherdimensionalen Räumen, wo sich neben der wachsenden Komplexität noch ein weiteres Problem ergibt: Zwar lässt sich auch in diesem Fall $\Lambda^m(\mathrm{Sym}_d V)$ als Untermodul von $\bigotimes_j \Lambda^{m_j}W$ auffassen, jedoch ist dem Autor kein Verfahren bekannt, um im allgemeinen Fall die Einbettung zu berechnen.

Beispiel 3.4.5. Greifen wir das Beispiel der Auflösung von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ auf, bzw. betrachten wir genauer diejenige von $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ (vgl. 2.4.1). Ihr Betti–Diagramm ist

$$\begin{array}{c|cccccccc}
1 & \cdots & 3 & 2 & 1 & . & . & . & \cdots \\
0 & \cdots & . & . & . & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
\hline
 & \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & \cdots
\end{array}$$

Daher gibt es zwischen je zwei Moduln der Auflösung genau einen Weg. Die linearen Differenziale in der Tate–Auflösung einer Veronese–Einbettung von

$\mathcal{F}$ kennen wir bereits. In diesem Fall haben sie (bzgl. derselben Basen wie in Beispiel 2.4.1) die Form

$$\begin{pmatrix} f_0 & \cdots & f_d & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & f_0 & \cdots & f_d \end{pmatrix}$$

oder sind dazu transponiert.

Wir wollen nun das nichtlineare Differenzial in $\mathbf{T}(v_2\mathcal{F}(1))$ berechnen, einer Auflösung mit Betti–Diagramm

$$\begin{array}{c|cccccccc} 1 & \cdots & 6 & 4 & 2 & . & . & . & \cdots \\ 0 & \cdots & . & . & . & 2 & 4 & 6 & \cdots \\ \hline & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

Es ist also $V = \langle e_0, e_1 \rangle, W = \langle x_0, x_1 \rangle$ und $\widetilde{V} = (\mathrm{Sym}_2 W)^* = \langle f_0, f_1, f_2 \rangle$.

Bezeichnen wir die Differenziale in $\mathbf{T}(\mathcal{F}(1))$ mit φ^i und diejenigen in $\mathbf{T}(v_2\mathcal{F}(1))$ mit Φ^i, so wollen wir also $\Phi := \Phi^{-1}\colon A \to \Lambda^2(\widetilde{V}) \otimes B$ berechnen, wobei $E \otimes A$ und $E \otimes B$ die Terme vom kohomologischen Grad -1 und 0 in $\mathbf{T}(\mathcal{F}(1))$ sind. Der erste Schritt ist dabei, die Adjungierten der Differenziale auf dem Weg $\left(\varphi^{-3}, \varphi^{-2}, \varphi^{-1}\right)$ zu komponieren. Dies liefert die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 \otimes x_0 \wedge x_1 \otimes x_0 & x_0 \otimes x_0 \wedge x_1 \otimes x_1 \\ x_1 \otimes x_0 \wedge x_1 \otimes x_0 & x_0 \otimes x_1 \wedge x_1 \otimes x_1 \end{pmatrix} .$$

Die zweite Zutat zur Berechnung von Φ ist die Einbettung

$$\Lambda^2(\mathrm{Sym}_2 W) \otimes A \to W \otimes \Lambda^2 W \otimes W \otimes A = A \otimes \Lambda^2 W \otimes W \otimes W \ .$$

Dazu erinnern wir uns an die Identität $\Lambda^2(\mathrm{Sym}_2 W) = W^{(3,1)}$ aus Korollar 1.3.11. Der Isomorphismus, und damit die gesuchte Einbettung, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} ab \wedge cd \quad \mapsto \quad & c_{(3,1)}\big((a \otimes b \otimes c) \otimes d\big) + c_{(3,1)}\big((a \otimes b \otimes d) \otimes c\big) \\ = \quad & a \wedge c \otimes b \otimes d + a \wedge c \otimes d \otimes b \\ & + a \wedge d \otimes b \otimes c + a \wedge d \otimes c \otimes b \\ & + b \wedge c \otimes a \otimes d + b \wedge c \otimes d \otimes a \\ & + b \wedge d \otimes a \otimes c + b \wedge d \otimes c \otimes a \ . \end{aligned}$$

Wohldefiniertheit und Bijektivität ergeben sich durch direktes Nachrechnen. Hintereinanderausführung der Einbettung und der oben bestimmten Abbildung ergibt

$$\begin{pmatrix} f_0 \wedge f_1 & f_0 \wedge f_2 \\ f_0 \wedge f_2 & f_1 \wedge f_2 \end{pmatrix}$$

und diese Abbildung ergänzt die (schon bekannten) linearen zu einem exakten Komplex.

Anhang A

Implementierung in Macaulay2

In diesem Kapitel präsentieren wir eine Implementierung der vorgestellten Ideen in dem Computeralgebra–System Macaulay2. Bevor wir den verwendeten Programmcode vorstellen, sind einige einleitende Bemerkungen nötig.

- Meistens werden wir einen Modul M durch eine Präsentationsmatrix m repräsentieren. Der Wechsel zwischen einem Modul und seiner Präsentationsmatrix geschieht mit den Befehlen `presentation(M)` und `coker(m)`.

- Viele Ausgaben von Macaulay2–Prozeduren liefern auch Informationen über den Typ des Ergebnisses. Dieser ist jedoch in den allermeisten Fällen klar, so dass wir diese Informationen fast durchgängig unterdrückt haben.

- Macaulay2 gibt Komplexe in absteigender Notation an, d.h. als

$$\cdots \longleftarrow C_{-1} \longleftarrow C_0 \longleftarrow C_1 \longleftarrow \cdots \ .$$

- Die Konvention für das Anzeigen von Betti–Diagrammen in Macaulay2 unterscheidet sich in zwei Punkten von unserer. Zum Einen sind – in Übereinstimmung mit der absteigenden Notation von Komplexen – die Einträge horizontal und vertikal gespiegelt, zum Anderen sind die das eigentliche Diagramm begleitenden Einträge teilweise anders gewählt. Betrachten wir als Beispiel den folgenden Ausschnitt aus der Tate–Auflösung von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ und das zugehörige Betti–Diagramm:

```
i1: E = ZZ/32003[e_0..e_1,SkewCommutative=>true];
```

```
i2: m = matrix{{e_0*e_1}};
```

```
i3: R = res coker m

      1      1      2      3
o3 = E  <-- E  <-- E  <-- E

     0      1      2      3

i4: betti R

o4 = total: 1 1 2 3
         0: 1 . . .
         1: . 1 2 3
```

Die oberste Zeile des Diagramms zeigt, genau wie die Exponenten in der Ausgabe der Auflösung, die Ränge der beteiligten freien Moduln an. In den Zeilen darunter wird diese Zahl jeweils in die Zahl der Erzeuger der homogenen Bestandteile zerlegt. Die erste Spalte zeigt dabei die Grade der Erzeuger des Moduls vom kohomologischen Grad 0 an (der kohomologische Grad eines Moduls wird in der Ausgabe `o3` der Auflösung durch Macaulay2 unter dem Modul vermerkt). Dieser hat also im Beispiel einen Erzeuger vom Grad 0 und keine weiteren Erzeuger. Die übrigen Einträge des Diagramms ergeben sich wie bekannt, d.h. der zweite Modul der Auflösung hat einen Erzeuger vom Grad 2 usw..

Damit ist aus dem Betti–Diagramm insbesondere nicht direkt abzulesen, welches der Term mit kohomologischem Grad 0 ist. Diese Information müssen wir direkt der Auflösung `o3` entnehmen, bei der unter jedem Term sein kohomologischer Grad vermerkt ist.

Berechnung von Tate–Auflösungen

Kommen wir nun zu den Algorithmen. Im ersten Teil dieses Abschnitts stützen wir uns teilweise auf das Kapitel *Sheaf Algorithms Using the Exterior Algebra* in [6], wo die Prozedur `symExt` und ähnliche Prozeduren zur Berechnung von Tate–Auflösungen und Garbenkohomologie beschrieben werden.

Zunächst wollen wir uns an einem Beispiel die Berechnung einer Tate–Auflösung ansehen.

Beispiel A.0.1. Berechnen wir die Tate-Auflösung der *twisted cubic*, der rationalen Normkurve vom Grad 3. Sie ist gegeben als Nullstellenmenge der 2x2-Minoren von

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

d.h. der Polynome

$$x_0x_2 - x_1^2, \quad x_0x_3 - x_1x_2, \quad x_1x_3 - x_2^2$$

in $\mathbb{P}(W)$, $W = \langle x_0, \ldots, x_3 \rangle$. Zunächst definieren wir den Grundkörper und die äußere Algebra, sowie eine darstellende Matrix der Kurve.

```
i1 : kk=ZZ/32003;

i2 : n=3;

i3 : S=kk[x_0..x_n];

i4 : E=kk[e_0..e_n,SkewCommutative=>true];

i5 : m=matrix(apply(2,i->apply(n,j->x_(i+j))))

o5 = | x_0 x_1 x_2 |
     | x_1 x_2 x_3 |

             2       3
o5 : Matrix S  <--- S
```

Berechnen wir eine freie Auflösung des von m präsentierten Moduls, so stellen wir fest, dass diese nicht linear ist. Das lässt sich auch an der Regularität dieses Moduls erkennen:

```
i6 : betti res coker m

o6 = total: 2 3 1
         0: 2 3 .
         1: . . 1

i7 : regularity coker m

o7 = 1
```

Schneiden wir an der richtigen Stelle ab, so wird die Auflösung linear:

```
i8 : m1=presentation truncate(regularity coker m,coker m);

i9 : betti res coker m1

o9 = total: 5 12 9 2
         1: 5 12 9 2
```

Erinnern wir uns an die Definition der Tate–Auflösung einer Garbe. Der erste Schritt bestand dabei darin, den Funktor $\mathbf{R}$ auf einen 0-regulären Modul anzuwenden. Dies ahmen wir durch die Prozedur `symExt` nach. Deren Code werden wir später angeben; für den Moment genügt es zu wissen, dass `symExt(m,E)` zu einem durch die Matrix `m` präsentierten, 0-regulären S-Modul M und der äußeren Algebra `E` das erste Differenzial in $\mathbf{R}(M)$ berechnet.

Der zweite Schritt bestand darin, an $\mathbf{R}(M)$ eine freie Auflösung des Cokerns des ersten Differenzials anzuhängen. Auch dies vollziehen wir hier nach.

```
i10 : m1E=symExt(m1,E);

i11 : betti(res coker m1E)

o11 = total: 8 5 3 4 7 10
         -1: 8 5 2 . .  .
          0: . . 1 4 7 10
```

Also hat die twisted cubic (bis auf einen Shift) eine Tate–Auflösung mit Betti–Diagramm

$$\begin{array}{c|cccccccc} 1 & \cdots & 10 & 7 & 4 & 1 & . & . & \\ 0 & & . & . & . & 2 & 5 & 8 & \cdots \\ \hline & \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & \cdots \end{array}$$

An dieser Stelle sehen wir auch die Notwendigkeit, mit einem 0-regulären Modul zu starten. Beginnen wir nämlich die Berechnung mit `m` statt `m1`, so erhalten wir nicht die gesuchte Auflösung:

```
i10 : mE=symExt(m,E);

i11 : betti(res coker mE)

o11 = total: 5 2 3 10 22 40
         -1: 5 2 .  .  .  .
          0: . . .  .  .  .
          1: . . 3 10 22 40
```

Diese Auflösung hat drei Zeilen, kann also nicht die Auflösung einer Garbe mit eindimensionalem Träger sein. Und noch etwas sehen wir hier: der Grad der Erzeuger des ersten Moduls wird von Macaulay2 als -1 angegeben, danach steigen die Grade an. Dies widerspricht unserer Konvention, muss also angemessen berücksichtigt werden.

Kommen wir nun zurück zu dem einzigen bisher ungeklärten Schritt in diesem Beispiel. Die Prozedur `symExt` berechnet für einen graduierten S-Modul M, der durch eine Präsentationsmatrix `m` gegeben ist, das erste Differenzial von $\mathbf{R}(M)$. Voraussetzung ist, dass der Modul eine Regularität von 0 besitzt. Ist dies nicht der Fall, so können wir `symExt` stattdessen auf eine Präsentation des Untermoduls $M_{\geq r} \subseteq M$, $r \geq \operatorname{reg}(M)$, anwenden.

Umgekehrt berechnet `symExt` auch aus einer linearen Abbildung über der äußeren Algebra den Modul, dessen Tate–Auflösung die gegebene Abbildung als erstes Differenzial besitzt.

Basis dafür ist zum einen die Tatsache, dass die Multiplikationsabbildung auf M in der darstellenden Matrix codiert ist, zum anderen Lemma 3.2.3, nach dem sich die Differenziale in $\mathbf{R}(M)$ aus dieser Multiplikationsabbildung berechnen lassen.

```
symExt = (m,E) ->(
    ev := map(E,ring m,vars E);
    mt := transpose jacobian m;
    jn := gens kernel mt;
    q  := vars(ring m)**id_(target m);
    mE := ev(q*jn);
    -- Graduierung anpassen:
    map(E^{(rank target mE):1},E^{(rank source mE):0},mE)
)
```

Beispiel A.0.2. In obigem Beispiel haben wir aus `m1` das „Basis–Differenzial" `m1E` der Tate–Auflösung der twisted cubic berechnet. Diesen Schritt können wir auch umkehren:

```
i12 : symExt(mE1,S)

o12 = {-1} | x_0 0    0    0    x_1 0    0    x_0 x_2 0    x_0 x_1 |
      {-1} | 0   x_1  x_2  x_3  0   0    0    0   0   0    0   0   |
      {-1} | x_3 -x_0 0    0    0   x_1  0    0   0   x_2  0   0   |
      {-1} | 0   0    -x_0 0    x_3 -x_0 x_1  0   0   0    x_2 0   |
      {-1} | 0   0    0    -x_0 0   0    -x_0 x_1 x_3 -x_0 0   x_2 |

              5       12
o12 : Matrix S  <--- S

i13 : m1

o13 = {1} | 0    x_2 0    0    0    x_1 0    0    0   0    0   x_0 |
      {1} | 0    0   0    0    0    0   x_1  0    x_2 0    x_3 0   |
      {1} | 0    0   -x_2 0    -x_3 0   x_0  -x_1 x_1 -x_2 x_2 x_3 |
      {1} | -x_3 0   x_1  -x_2 x_2  x_3 0    x_0  0   0    0   0   |
      {1} | x_2  x_3 0    x_1  0    0   0    0    0   x_0  0   0   |

              5       12
o13 : Matrix S  <--- S
```

Der einzige Unterschied zwischen diesen Abbildungen besteht offenbar (neben der verschiedenen Graduierung) in der Wahl der Basen. Die ebenfalls in [6] beschriebene Prozedur `bgg` betreibt zusätzlichen Aufwand, um die Basen in einer einfacher vorhersehbaren und konsistenten Weise zu wählen.

Mit Hilfe der Prozedur `symExt` lässt sich nun jeder endliche Ausschnitt der Tate–Auflösung berechnen, und wir können die bisherigen Überlegungen in einer einzigen Funktion bündeln.

Ist `m` die darstellende Matrix eines graduierten Moduls M über `S`, so berechnet `tate(m,E,l,h)` den Ausschnitt

$$T^l(\widetilde{M}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow T^h(\widetilde{M})$$

der Tate–Auflösung von $\widetilde{M}$. Dabei folgt die Prozedur genau dem Vorgehen im ersten Beispiel dieses Abschnitts, d.h. sie berechnet zunächst die Regularität von M und daraus ein Differenzial von $\mathbf{R}(M_{\geq \mathrm{reg}(M)})$. Schließlich müssen noch die Grade der Differenziale und der Shift der Auflösung angepasst werden. Die Graduierung ergibt sich dabei im Wesentlichen aus der Regularität von M, der Shift aus den gewählten Grenzen:

```
tate = (m,E,loDeg,hiDeg)->(
     M   := coker m;
     reg := regularity M;
     bnd := max(reg+1,hiDeg-1);
     mt  := presentation truncate(bnd,M);
     mE  := symExt(mt,E);
     -- Graduierung an das Abschneiden von M anpassen:
     mE   = map(E^{(rank target mE):-bnd},
                E^{(rank source mE):-bnd-1},
                mE);
     mE   = transpose mE;
     -- obere Grenze anpassen, falls M
     -- zu stark trunkiert werden musste
     if bnd>hiDeg-1 then
       mE = (res(coker mE,
                 LengthLimit=>(bnd-hiDeg+2))).dd_(bnd-hiDeg+2);
     res(coker mE,LengthLimit=>max(1,hiDeg-loDeg))[hiDeg]
)
```

An dieser Stelle sind ein paar Worte zum Format der ausgegebenen Auflösung nötig. Diese wollen wir anhand eines Beispiels formulieren.

Beispiel A.0.3. Berechnen wir die Tate–Auflösung der twisted cubic mit der Prozedur `tate` und extrahieren wir einige Informationen aus dem Ergebnis:

```
i14 : tate(m,E,-3,2)

       8      5      3      4      7      10
o14 = E  <-- E  <-- E  <-- E  <-- E  <-- E

      -2     -1      0      1      2      3

i15 : betti tate(m,E,-3,2)

o15 = total: 8 5 3 4 7 10
          0: 8 5 2 . .  .
          1: . . 1 4 7 10

i16 : unique flatten degrees (tate(m,E,-3,2))_-1

o16 = {-1}
```

Zunächst erinnern wir an die Tatsache, dass in Macaulay2 Auflösungen und Betti–Diagramme im Vergleich zu unserer Schreibweise gespiegelt sind.

Die unter den Moduln der Tate–Auflösung stehenden Zahlen geben den kohomologischen Grad des jeweiligen Moduls an. Da dieser bei Macaulay2 in Richtung freier Auflösungen ansteigt, entsprechend unserer Konventionen jedoch absteigen sollte, gilt hier, dass für $i \in \mathbb{Z}$ das Ergebnis des Kommandos `(tate(m,E,l,h))_i` der $(-i)$-*te* Term der Tate–Auflösung ist.

Die zweite Beobachtung ist, dass auch die Erzeugergrade der Moduln negiert sind. Auch dies ist eine Folge der gespiegelten Notation von Auflösungen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch Prozeduren zur Berechnung einiger einfacher Tate–Auflösungen demonstrieren, die Grundlage vieler Experimente und auch einiger Beispiele in dieser Arbeit waren.

Die oben demonstrierte Methode der Auflösungsberechnung bewirkt oft, dass die Matrizen der Differenziale nicht in einer intuitiv zugänglichen Form angegeben und vorhandene Strukturen durch eine ungeschickte Basiswahl verdeckt werden.

Dies können wir umgehen, wenn wir Vorwissen über die Differenziale der Tate–Auflösung einbringen und die Matrizen in einer Form vorgeben, die diese Strukturen betont. So kennen wir beispielsweise die linearen Differenziale der Auflösungen $\mathbf{T}(v_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i))$ in Spezialfällen aus den Beispielen 2.4.1 und 2.4.2, und wir haben schon geschlossen, dass sie auch allgemein bzgl. geeigneter Basen die Form

$$\begin{pmatrix} f_0 & \cdots & f_d & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & f_0 & \cdots & f_d \end{pmatrix}$$

haben. Da Macaulay2 im Allgemeinen bei der Berechnung einer Auflösung die Basen nicht so wählen wird, dass die Abbildungen alle diese Gestalt haben, helfen wir nach, indem wir die linearen Differenziale (und damit die Basen) vorgeben.

Wählen wir den Twist i so, dass die Matrix des nichtlinearen Differenzials, der „Sprung“ der Auflösung, quadratisch ist, können wir seine Einträge aus dem Wissen berechnen, dass einerseits die Komposition dieses Differenzials mit den beiden benachbarten jeweils die Nullabbildung sein muss, und andererseits die Matrizen letztgenannter Differenziale durch Transposition ineinander übergehen. (Sicherlich ist die Berechnung noch direkter möglich, jedoch nicht mit den bisher entwickelten Mitteln.)

Das fragliche Differenzial berechnen wir wie folgt, wobei wir am Ende die Graduierung schon so anpassen, dass das Ergebnis wirklich ein Differenzial der Tate–Auflösung von $v_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i))$ ist:

```
jump = (d) -> (
     kk=ZZ/32003;
     E   = kk[e_0..e_d,
              SkewCommutative=>true,MonomialOrder=>GLex];
     F  := E[a_1..a_(binomial(d+1,2))];
     ind:=0;
     mhelp := matrix table(d,d, (i,j) ->
         if i<=j then (ind=ind+1; a_ind) else 0*a_1);
     m  := matrix table(d,d, (i,j) ->
         if i<=j then mhelp_(i,j) else mhelp_(j,i));
     m1 := substitute(matrix table(d,2*d, (i,j) ->
         if i<=j and j-i<=d then e_(j-i) else 0),F);
     J  := jacobian ideal flatten entries(m*m1);
     erg:= gens kernel transpose substitute(J,E);
     l  := (entries transpose erg)#0;
     val:= substitute(m,apply(#l,i->a_(i+1)=>-l_i));
     map(E^{d:0},E^{d:-2},val)
 )
```

Einen größeren Ausschnitt der Tate–Auflösung erhalten wir dann durch Hinzufügen der linearen Differenziale.

```
symmEmbedding = (d) -> (
    middle := jump(d);
    E = ring source middle;
    makelinearmap := (numlines) -> (
        matrix (E,table(numlines,numlines+d,
            (i,j) -> if i<=j and j-i<=n then e_(j-i) else 0)));
    startmap := map(E^{d*(5):4},E^{d*(4):3},
                 transpose makelinearmap(d*(4)));
    maplist1 := reverse (
               apply(3,i-> transpose makelinearmap(d*(i+1))));
    maplist2 := apply(2,i->makelinearmap(d*(1+i)));
    chainComplex(flatten{startmap,maplist1,middle,maplist2})[4]
)
```

Berechnung von Veronese–Einbettungen

Auch wenn wir mit Macaulay2 die Tate–Auflösung der Veronese–Einbettung einer Garbe aus der Auflösung der Garbe selbst berechnen, folgen wir genau den Überlegungen aus Kapitel 3, genauer dem Algorithmus 3.3.2.

Im Detail bedeutet dies Folgendes: Die Prozedur `veronese` liefert zu einem Ausschnitt `T` der Tate–Auflösung $\mathbf{T}(\mathcal{F})$ einer Garbe $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ und einer positiven Zahl `d` einen Ausschnitt der Tate–Auflösung der d-upel–Einbettung $v_*\mathcal{F}$.

Dies geschieht in mehreren Schritten. Zunächst extrahieren wir eine Abbildung aus $\mathbf{R}(M_{\geq \mathrm{reg}(M)})$, d.h. ein lineares Differenzial d: $T^i \to T^{i+1}$, bei dem die Grade der Erzeuger von T^i und T^{i+1} mit dem kohomologischen

Grad dieser Moduln übereinstimmen, und berechnen daraus eine Präsentationsmatrix eines geeigneten Anteils Ma $= \bigoplus_{i \geq b \cdot d} M_i$ von M. Enthält der gegebene Ausschnitt der Auflösung kein geeignetes Differenzial, so erweitern wir ihn zuvor sukzessive.

In einem zweiten Schritt bestimmen wir daraus die Multiplikationsabbildung von $M_{b \cdot d}$ nach $M_{(b+1) \cdot d}$, deren Adjungierte nach Lemma 3.2.3 das erste Differenzial von $M_{\geq b \cdot d}$ ist.

Aus diesem können wir dann beliebige Teile von $\mathbf{T}(v_* \mathcal{F})$ berechnen.

```
veronese=(T,E,d)->(
    -- Initialisierungen
    E0 := ring T_(min T);
    kk := coefficientRing E0;
    n  := rank source vars E0-1;
    N  := binomial(n+d,n);
    if N=!=rank source vars E then
         error ("in procedure \"veronese\": "|
                "Expected E with "|N|" Variables, "|
                "but got "|(rank source vars E)|".");
    S  :=kk[x_0..x_n];
    -- Schritt 1a
    inH0:=apply((min T)..(max T),i->(max degrees T_i)#0==i);
    tmin:=-infinity;
    scan(1..#inH0-1,i->if inH0_i then tmin=i+(min T));
    if tmin <= min T then
    then (
         -- Auflösung erweitern
         t := min T+1;
         mE:= T.dd_t;
         T':=(chainComplex transpose
             (res coker transpose mE).dd_5)[5-t];
         return (veronese(T',E,d,recurse=>0)));
    mE  = T.dd_tmin;
    -- Schritt 1b
    reg:= regularity coker symExt(mE,S);
    bnd:= ceiling((reg-tmin)/d)+2;
    r1 := res(coker transpose mE,LengthLimit=>(bnd)*d+tmin+1);
    mE  = transpose r1.dd_((bnd)*d+tmin+1);--(bnd+1);
    m  := symExt(mE,S);
    Ma := coker m;
    -- Schritt 2
    M0 := basis(0,Ma);
    M1 := basis(d,Ma);
    F1 := chainComplex(M1);
    Lb := (entries symmetricPower(d,vars S))#0;
    t:=Lb#0;tm:=m;etm:=m;Ft:=F1;
    MM := sum(N,i->( t=Lb#i;
        tm=(map(target M1, source M0**(S^{-d}),(t*M0))% gb m);
        Ft=chainComplex(tm);
```

```
            etm=extend(F1,Ft,map(F1_0,Ft_0,id_(target M1)));
                 E_i*substitute(etm_1,E)));
        -- Schritt 3
        MM  = map(E^{(rank target MM):-bnd+1},
                 E^{(rank source MM):-bnd},MM);
        (res (coker transpose MM,LengthLimit=>4))[bnd]
    )
```

Beispiel A.0.4. Wir vollziehen das Beispiel 3.2.1 der Strukturgarbe des Punktes $(2:1) \in \mathbb{P}^1$ nach. Ihre Tate–Auflösung erhalten wir durch

```
i17 : S = kk[x_0..x_1];

i18 : E = kk[e_0..e_n,SkewCommutative=>true];

i19 : T = tate(matrix{{x_1-2*x_0}},E,-2,2);
```

Nun berechnen wir die Tate–Auflösung der 2-upel-Einbettung und extrahieren eines der Differenziale.

```
i20 : F = kk[f_0..f_2,SkewCommutative=>true];

i21 : T2 = veronese(T,F,2)

       1      1      1      1      1
o21 = F  <-- F  <-- F  <-- F  <-- F

      -1     0      1      2      3

i22 : T2.dd_1

o22 = | -f_0-2f_1-4f_2 |
```

Genauso verfahren wir bei der 3-upel-Einbettung.

```
i23 : F = kk[f_0..f_3,SkewCommutative=>true];

i24 : T3 = veronese(T,F,3)

       1      1      1      1      1
o24 = F  <-- F  <-- F  <-- F  <-- F

      -1     0      1      2      3

i25 : T3.dd_1

o25 = | -f_0-2f_1-4f_2-8f_3 |
```

In beiden Fällen erhalten wir (bis auf einen Faktor) genau die im Beispiel angegebenen Differenziale.

Kohomologieberechnungen

In Beispiel 2.3.4 haben wir einen exemplarisch durchgeführten Vergleich zweier Methoden zur Berechnung von Kohomologiegruppen gesehen. Dabei kamen zwei Methoden zum Einsatz: die Verwendung der in Macaulay2 eingebauten Prozedur `HH` und die Verwendung der Tate–Auflösung.

Die Prozedur `HH` basiert auf der Identität

$$\mathbf{H}^j_*\mathcal{F} \cong \operatorname{Ext}^{n-j}_S(M, S(-n-1))^\vee \ ,$$

die für jeden endlich erzeugten S-Modul M, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ und $j \geq 1$ gilt. Dabei ist $N^\vee$ das graduierte Vektorraum–Duale des S-Moduls N. Der Prozeduraufruf `HH^j(F(i))` liefert zu einem Objekt `F` vom Typ `sheaf` den $\Bbbk$-Vektorraum $\mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i))$.

Eine Alternative bietet die Verwendung der in Bemerkung 2.3.3 angedeuteten Methode. Dazu berechnen wir zuerst einen Ausschnitt der Tate–Auflösung. Aus diesem lassen sich wiederum die entsprechenden Kohomologiegruppen der Twists von $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ auslesen.

Insbesondere liefert `tate(m,E,l,h)_(-i)` für $l \leq i \leq h$ die Kohomologiegruppen $\mathbf{H}^j(\mathcal{F}(i-j))$.

Zum Vergleich der Ausführungszeiten haben wir Kohomologiegruppen gegebener Garben $\mathcal{F}$ einmal mit `HH` und einmal mit `tate` berechnet. Dabei wurde nach jeder Berechnung der Interpreter neu initialisiert. Gegeben waren jeweils eine Darstellung des zu untersuchenden Objekts als Garbe und als Modul. Die Ausgabe der Ergebnisse erfolgt in unterschiedlichen Formaten, wobei das Auslesen konkreter Kohmologiegruppen aus beiden Formaten praktisch gleich schnell geschehen kann.

Als erstes haben wir einen Twist des Horrocks–Mumford Bündels in $\mathbb{P}^4$ gewählt. Seine Tate–Auflösung enthält das Differenzial

$$\begin{pmatrix} e_1 \wedge e_4 & e_2 \wedge e_0 & e_3 \wedge e_1 & e_4 \wedge e_2 & e_0 \wedge e_3 \\ e_2 \wedge e_3 & e_3 \wedge e_4 & e_4 \wedge e_0 & e_0 \wedge e_1 & e_1 \wedge e_2 \end{pmatrix} \ .$$

Die zugehörige kohärente Garbe bzw. deren darstellenden Modul erhalten wir wie folgt:

```
-- Horrocks-Mumford Bündel in P^4
kk=ZZ/32003;
S = kk[x_0..x_4];
E = kk[e_0..e_4,SkewCommutative=>true];
hormum=matrix{{e_1*e_4,e_2*e_0,e_3*e_1,e_4*e_2,e_0*e_3},
              {e_2*e_3,e_3*e_4,e_4*e_0,e_0*e_1,e_1*e_2}};
ME = (res (coker hormum,LengthLimit=>6)).dd_6;
MS = symExt(ME,S);
F  = sheaf coker MS;
```

Nun können wir Kohomologiegruppen von Twists dieser Garbe berechnen:

```
-- Berechnung von HH^j(F(i-j)) für -7<=i<=0 und alle j
time tate(MS,E,0,7);
time apply(5,j-> apply(8,i-> HH^j(F(i-j))));

-- Berechnung von HH^4(F(-14))
time tate(MS,E,-10,-9);
time HH^4(F(-14));
```

Ähnlich läuft die Berechnung von Kohomologiegruppen der rationalen Normkurve vom Grad 10:

```
-- Rationale Normkurve vom Grad n;
n = 10;
kk=ZZ/32003;
S = kk[x_0..x_n];
E = kk[e_0..e_n,SkewCommutative=>true];
MS = matrix(apply(2,i->apply(n,j->x_(i+j))))
F  = sheaf coker MS;

-- Berechnung von HH^j(F(i-j)) für 0<=i<=2 und alle j
time tate(MS,E,0,2);
time apply(n+1,j-> apply(3,i-> HH^j(F(i-j))));

-- Berechnung von HH^j(F(8-j)) und HH^j(F(9-j)) für alle j
time tate(MS,E,8,9);
time apply(n+1,j-> apply(2,i-> HH^j(F(8+i-j))));

-- Berechnung von HH^0(F(60)) und HH^0(F(120))
time tate(MS,E,60,61);
time HH^0(F(60));
time HH^0(F(120));
```

Die auf diese Weise ermittelten Berechnungszeiten variieren selbst bei mehrfacher, von Neustarts unterbrochener Wiederholung auf dem selben Rechner um einige Prozent. Die in 2.3.4 angegebenen Werte stellen jeweils den Durchschnittswert von 5 Berechnungen dar.

Literaturverzeichnis

[1] A. A. Beĭlinson. Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra. *Funktional. Anal. Appl.*, 12:214–216, 1978.

[2] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand. Algebraic vector bundles on $\mathbf{P}^n$ and problems of linear algebra. *Funktional. Anal. Appl.*, 12:212–214, 1978.

[3] N. Bourbaki. *Eléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.* Hermann, Paris, 1970.

[4] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[5] David Eisenbud, Gunnar Fløystad, and Frank-Olaf Schreyer. Sheaf cohomology and free resolutions over exterior algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(11):4397–4426 (electronic), 2003.

[6] David Eisenbud, Daniel R. Grayson, and Michael Stillman, editors. *Computations in algebraic geometry with Macaulay 2*, volume 8 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[7] David Eisenbud, Frank-Olaf Schreyer, and Jerzy Weyman. Resultants and Chow forms via exterior syzygies. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3):537–579 (electronic), 2003.

[8] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.

[9] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory: a First Course*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[10] Andreas Gathmann. *Algebraic Geometry.* Lecture Notes, 2004. http://www.mathematik.uni-kl.de/∼gathmann/ps/261.ps.

[11] S. I. Gel′fand. Sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra. *Appendix to the Russian edition of [16]*, 1984.

[12] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11):167, 1961.

[13] Robin Hartshorne. *Local cohomology*, volume 1961 of *A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[14] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[15] Irving Kaplansky. Projective modules. *Ann. of Math (2)*, 68:372–377, 1958.

[16] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*, volume 3 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston, Mass., 1980.

[17] Jean-Pierre Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278, 1955.

Symbolverzeichnis

$\lvert X\rvert$	Mächtigkeit einer Menge, 10
$\Bbbk$	Grundkörper, 10
$\mathrm{Mat}(m \times n, R)$	$m \times n$-Matrizen über R, 10
M_d	homogener Anteil vom Grad d, 10
$M_{\geq d_0}$	Trunkierung von M im Grad d_0, 10
$M(d)$	getwisteter Modul, 10
$\mathbb{P}(V)$	projektiver Raum über V, 10
$M^{\otimes d}$	d-faches Tensorprodukt von M, 15
$\mathrm{Sym}(M)$	symmetrische Algebra von M, 15
$\Lambda(M)$	äußere Algebra von M, 15
x^α	Produkt $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, 15
$\lvert\alpha\rvert$	Betrag eines Multiindex, 15
$C^\bullet$	Komplex, 19
$C^\bullet[j]$	verschobener Komplex, 19
$\mathbf{H}_i(C^\bullet)$	i-te Hohomologiegruppe von $C^\bullet$, 20
$\mathrm{lin}(A)$	linearer Teil einer Matrix, 27
$\mathrm{lin}(F^\bullet)$	linearer Teil eines Komplexes, 28
$\mathrm{reg}(M)$	Castelnuovo–Mumford–Regularität, 29
$\lambda \vdash d$	λ ist Partition von d, 30
c_λ	Symmetrisierende zu λ, 31
V^λ	Schurmodul, 32

$\Gamma(U, \mathcal{F})$	Schnittfunktor, 34
$\mathcal{F}_p$	Halm von $\mathcal{F}$ im Punkt p, 35
$\sup \mathcal{F}$	Träger der Garbe $\mathcal{F}$, 35
$\mathcal{F}^n$	n-fache direkte Summe von $\mathcal{F}$, 35
$\mathcal{F}\|_X$	Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf X, 36
$f_*\mathcal{F}$	Bildgarbe, 36
Proj R	projektives Spektrum eines Rings, 36
Spec R	affines Spektrum eines Rings, 37
$\widetilde{M}$	zu M assoziierte Garbe, 37
$\mathcal{F}(i)$	Twist einer Garbe, 38
$f^*\mathcal{F}$	Urbildgarbe, 38
$\mathbf{H}^j(\mathcal{F})$	j-te Kohohomologiegruppe von $\mathcal{F}$, 39
$\mathbf{H}^j_I(M)$	j-ter lokaler Kohomologiemodul von M, 40
v_d	Veronese–Einbettung, 41
$\mathbf{R}(M)$	Funktor der BGG–Korrespondenz, 46
$\mathbf{L}(P)$	Funktor der BGG–Korrespondenz, 50
$\mathbf{T}(M)$	Tate–Auflösung eines Moduls, 51
$\mathbf{T}(\mathcal{F})$	Tate–Auflösung einer Garbe, 51
$\widetilde{V}$	zu $\mathrm{Sym}_d W$ dualer Vektorraum, 60
$\widetilde{E}$	äußere Algebra über $\widetilde{V}$, 60
f_α, $f_{\{i_1,\dots,i_d\}}$	Basiselement von $\widetilde{V}$, 60

Sachverzeichnis